Condições necessárias e suficientes para a divisibilidade entre números de Fibonacci e de Lucas.

Lucas Antonio Caritá

Grupo de Pesquisa em Matemática Científica e Computacional (GPMCC) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), São José dos Campos, SP.

prof.carita@ifsp.edu.br

impa
Instituto de Matemática
Pura e Aplicada

1 Introdução

Considere (F_n) a sucessão de Fibonacci dada por $F_1 = F_2 = 1$ e $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ para $n \geq 2$. Cada termo dessa sequência recebe o nome de número de Fibonacci. É amplamente conhecido que a sucessão (F_n) possui diversas propriedades interessantes e que pode ser generalizada de várias maneiras diferentes. Suas generalizações possuem propriedades similares à original, igualmente importantes, bem como aplicações em diversas áreas da matemática, física e engenharias.

Uma das maneiras de se generalizar a sucessão de Fibonacci é considerar a sequência (x_n) satisfazendo para alguns naturais k e q: $x_1 = k, x_2 = q$ e $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ para $n \geq 2$. Essa nova sucessão é chamada de (k, q)-Fibonacci e é objeto de interesse atual no campo da Álgebra. Podemos definir infinitas sequências a partir das generalizações da sucessão de Fibonacci, mas uma delas ficou particularmente famosa, a sequência de Lucas, que recebe este nome em homenagem ao matemático Francês François Édouard Lucas, que realizou diversos trabalhos com sequências recorrentes da sequência de Fibonacci. Ela é dada por $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ e $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ para $n \geq 2$. As sequências (L_n) e (L_n) estão conectadas de diversas formas. Existem inúmeras identidades envolvendo seus termos, algumas delas, por exemplo, podem ser conferidas no livro [2].

Apresentadas as sucessões (F_n) e (L_n), dado que elas estão intimamente associadas, é natural levantarmos questões acerca das relações entre elas. Uma questão que pode ser colocada é sobre a divisibilidade de seus termos, tanto para termos de uma sequência em específico, quanto para termos das duas sequências entre si. Nesse sentido, Carlitz, em 1964, publicou um trabalho na *"The Fibonacci Quarterly"* chamado *"A note on Fibonacci Numbers"* [1]. Carlitz, em seu texto, indicou, mas sem propriamente demonstrar, três critérios de divisibilidade entre números de Fibonacci e de Lucas. Um dos critérios se tornou bastante conhecido desde então e inúmeras demonstrações distintas podem ser encontradas na literatura. Todavia isso não se repete com os demais. Agregando a isso o fato de Carlitz não ter rigorosamente demonstrado tais resultados em seu trabalho, meu objetivo será apresentar uma demonstração matemática apropriada para cada um deles.

2 Conceitos Prévios

Lema 1. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Considere que (a, b) denota o mdc entre a e b. Assim:*

1. $(a, b) = (-a, b)$

2. $(a, 0) = |a|$ e $(0, b) = |b|$

3. Se $a \mid b$ então $(a, b) = |a|$.

A equação
$$x^2 - x - 1 = 0.$$
é conhecida como **Equação Quadrática de Fibonacci**.

Podemos calcular suas raízes. Observe que
$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-1)$$
$$\Delta = 1 + 4 = 5.$$

Portanto as raízes dessa equação, as quais chamaremos de α e β, serão:
$$\alpha = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$
e
$$\beta = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Teorema 2. ***(Teorema de Binet):*** *Pode-se encontrar os termos da sequência de Fibonacci através da relação*
$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \; com \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
onde $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ são as raízes da Equação Quadrática de Fibonacci.

Demonstração. Para $n = 0$, temos que o teorema é válido, pois:
$$\frac{\alpha^0 - \beta^0}{\alpha - \beta} = \frac{1 - 1}{\alpha - \beta} = 0 = F_0.$$

Agora observemos que α e β são as raízes da equação quadrática de Fibonacci, ou seja:
$$\alpha^2 = \alpha + 1 \text{ e } \beta^2 = \beta + 1.$$

Tomando a primeira igualdade podemos multiplicar os dois lados por α^{n-1} e na segunda por β^{n-1}, sendo assim
$$\alpha^{n+1} = \alpha^n + \alpha^{n-1} \text{ e } \beta^{n+1} = \beta^n + \beta^{n-1}.$$

Basta, agora, subtrairmos as igualdades encontradas, resultando em:
$$\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} = \alpha^n - \beta^n + \alpha^{n-1} - \beta^{n-1}. \quad (1)$$

Por fim, observe que $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, portanto, diferente de zero. Sendo assim podemos dividir os dois lados da Equação (1) por $\alpha - \beta$:
$$\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}. \quad (2)$$

Logo (x_n) onde $x_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ é uma sequência, tal que, da Equação (2), $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$. Observe que:
$$x_0 = \frac{\alpha^0 - \beta^0}{\alpha - \beta} = \frac{1 - 1}{\alpha - \beta} = 0,$$
$$x_1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = 1$$
e
$$x_2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta = 1.$$

Portanto, $x_0 = 0$, $x_1 = x_2 = 1$ e $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ para $n \geq 2$. Assim, a sequência (x_n) é a própria sequência de Fibonacci e assim $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$. □

Teorema 3. *O resultado equivalente ao Teorema de Binet para a sequência de Lucas, é:*
$$L_n = \alpha^n + \beta^n, \; com \; n = 1, 2, 3, \cdots$$
onde $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ são as raízes da Equação Quadrática de Fibonacci.

Propriedade 4. Sejam m e n números naturais, tais que $m \geq 1$ e $n \geq 1$, é verdadeira a igualdade:
$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

Propriedade 5. Sejam F_m e F_n dois números de Fibonacci quaisquer. O mdc entre eles é um número de Fibonacci e $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$

Propriedade 6. O $(2n)$-ésimo termo de Fibonacci é a multiplicação entre o n-ésimo termo de Fibonacci com o n-ésimo termo de Lucas, ou seja, $F_{2n} = F_nL_n$, com $n \geq 0$.

3 Resultados

Teorema 7. *Sejam F_m e F_n números de Fibonacci, com $m \neq 2$. $F_m \mid F_n$ se, e somente se, $m \mid n$.*

Demonstração. $(\Leftarrow)$ Como $m \mid n$, logo existe algum $k \in \mathbb{N}$, tal que $n = km$.

Vamos provar utilizando a indução sobre k:

1. Para $k = 1$, temos que $n = m$, logo $F_n = F_m$ e $F_m \mid F_n$.
2. Vamos supor que a propriedade seja válida para k, isto é $F_m \mid F_{km}$.
3. Vamos provar para $k + 1$, ou seja $n = m(k + 1)$. Observe que $F_{m(k+1)} = F_{mk+m}$. Logo pela Propriedade 4, temos que
$$F_{mk+m} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}.$$
Analisando os termos separadamente temos que $F_m \mid F_{mk-1}F_m$, pois $F_m \mid F_m$. Também $F_m \mid F_{mk}F_{m+1}$, pois $F_m \mid F_{mk}$ por hipótese de indução. Sendo assim $F_m \mid (F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1})$. Portanto $F_m \mid F_{m(k+1)}$.

$(\Rightarrow)$ Primeiramente note que a propriedade não funciona para $m = 2$, pois $F_2 = 1$ e obviamente $1 \mid F_n$, para qualquer índice n, mas 2 não divide qualquer índice n, logo a propriedade não é válida.

Para os demais valores de m vamos separar em dois casos:

Caso $m = 1$, nesse caso é trivial, pois 1 divide qualquer número natural.

Caso $m > 2$, nesse caso, pelo Lema 1 observe que se $F_m \mid F_n$, então $(F_m, F_n) = F_m$. Mas pela Propriedade 5 podemos concluir que $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$ e por consequência, $F_{(m,n)} = F_m$, sendo assim $m = (m, n)$. Provando por fim que $m \mid n$. □

Teorema 8. *Sejam L_n e L_m dois números quaisquer de Lucas, $L_m \mid L_n$ se, e somente se $n = (2k - 1)m$, com $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. $(\Leftarrow)$ Provemos que se $n = (2k - 1)m = 2km - m$, então $L_m \mid L_n$, onde $k \in \mathbb{N}$. Faremos por indução sobre k.

1. Para $k = 1$, $L_m \mid L_{1 \cdot m}$ é verdadeiro.
2. Suponha que $L_m \mid L_{2km-m}$.
3. Provemos que $L_m \mid L_{(2(k+1)-1)m}$.

$$\begin{aligned} L_{(2(k+1)-1)m} &= L_{(2k+2-1)m} \\ &= L_{2km+m} \\ &= L_{(2km-m)+2m} \\ &= L_{2km-m+1}F_{2m} \\ &+ L_{2km-m}F_{2m-1}. \end{aligned}$$

Como $L_m \mid F_{2m}$, temos que $L_m \mid L_{2km-m+1}F_{2m}$. Também $L_m \mid L_{2km-m}$ por hipótese de indução e então $L_m \mid L_{2km-m}F_{2m-1}$. Dessa forma $L_m \mid L_{2km+m}$, isto é, $L_m \mid L_{(2(k+1)-1)m}$.

Portanto esta provado o resultado.

$(\Rightarrow)$ Assumindo que $n = (2k - 1)m + r$, com $0 \leq r < m$, temos:

$$\begin{aligned} L_n = \alpha^n + \beta^n &= \alpha^{(2k-1)m+r} + \beta^{(2k-1)m+r} \\ &= \alpha^{(2k-1)m}\alpha^r + \beta^{(2k-1)m}\beta^r \\ &= \alpha^{(2k-1)m}\alpha^r - \beta^r\alpha^{(2k-1)m} \\ &+ \beta^r\alpha^{(2k-1)m} + \beta^{(2k-1)m}\beta^r \\ &= \alpha^{(2k-1)m}(\alpha^r - \beta^r) + \beta^rL_{(2k-1)m} \\ &= \alpha^{(2k-1)m}(\alpha - \beta)F_r + \beta^rL_{(2k-1)m} \\ &= \alpha^{(2k-1)m}\sqrt{5}F_r + \beta^rL_{(2k-1)m}. \end{aligned}$$

Como $L_m \mid L_n$ e $L_m \mid L_{(2k-1)m}$, então $L_m \mid F_r$. Uma vez que $0 \leq r < m$, segue que $r = 0$. Portanto $n = (2k - 1)m$. □

Note que $L_n \geq F_n$ se $n \geq 1$. Então:

Lema 9. *Se $L_m \mid F_r$ e $r \neq 0$, então $r \geq m$.*

Demonstração. Suponha $L_m \mid F_r$ e $r < m$. Então $F_r \geq L_m$ e $r < m$. Absurdo! □

Teorema 10. *Sejam L_n e F_m um número de Lucas e um número de Fibonacci quaisquer, respectivamente, $L_m \mid F_n$ se, e somente se, $n = 2mk$, com $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. $(\Leftarrow)$ Provemos que se $n = 2mk$, então $L_m \mid F_n$, onde $k \in \mathbb{N}$. Faremos por indução sobre k.

1. Para $k = 1$, $n = 2m$ e sabemos que $L_m \mid F_{2m}$ da Propriedade 6.
2. Suponha que $L_m \mid F_{2mk}$.
3. Provemos para $k + 1$.
$$F_{2m(k+1)} = F_{2mk+2m}$$
Da Propriedade 4.
$$F_{2mk+2m} = F_{2mk-1}F_{2m} + F_{2mk}F_{2m+1}$$
Sabemos que $L_m \mid F_{2mk-1}F_{2m}$, pois $L_m \mid F_{2m}$. Também sabemos que $L_m \mid F_{2mk}F_{2m+1}$, pois, pela hipótese de indução, $L_m \mid F_{2mk}$.
Portanto $L_m \mid (F_{2mk-1}F_{2m} + F_{2mk}F_{2m+1})$, isto é, $L_m \mid F_{2m(k+1)}$.
Provando assim o resultado.

$(\Rightarrow)$ Do algoritmo da divisão, existem inteiros k e r tais que $n = 2mk + r$ com $0 \leq r < 2m$.

Então:

$$\begin{aligned} \alpha^n - \beta^n &= \alpha^{2mk+r} - \beta^{2mk+r} \\ &= \alpha^{2mk+r} - \alpha^r\beta^{2mk} + \alpha^r\beta^{2mk} - \beta^{2mk+r} \\ &= \alpha^{2mk}\alpha^r - \alpha^r\beta^{2mk} + \alpha^r\beta^{2mk} - \beta^{2mk}\beta^r \\ &= \alpha^r(\alpha^{2mk} - \beta^{2mk}) + \beta^{2mk}(\alpha^r - \beta^r). \end{aligned}$$

Logo
$$\alpha^n - \beta^n = \alpha^r(\alpha^{2mk} - \beta^{2mk}) + \beta^{2mk}(\alpha^r - \beta^r).$$

E portanto
$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \alpha^r\left(\frac{\alpha^{2mk} - \beta^{2mk}}{\alpha - \beta}\right) + \beta^{2mk}\left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}\right).$$

Assim
$$F_n = \alpha^rF_{2mk} + \beta^{2mk}F_r.$$

Como $L_m \mid F_n$, então $L_m \mid F_r$, pois $L_m \mid F_{2mk}$.

Suponha que $r \neq 0$, pelo Lema 9, $r \geq m$, isto é, $r - m \geq 0$. Pelo Teorema 2:

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)F_r &= \alpha^r - \beta^r \\ &= \alpha^{r-m}\alpha^m - \beta^{r-m}\beta^m \\ &= \alpha^{r-m}(L_m - \beta^m) - \beta^m(L_{r-m} - \alpha^{r-m}) \\ &= \alpha^{r-m}L_m - \alpha^{r-m}\beta^m - \beta^mL_{r-m} \\ &+ \alpha^{r-m}\beta^m \\ &= \alpha^{r-m}L_m - \beta^mL_{r-m}. \end{aligned}$$

Logo
$$(\alpha - \beta)F_r = \alpha^{r-m}L_m - \beta^mL_{r-m}$$

Como $L_m \mid F_r$ e $L_m \mid L_m$, segue que $L_m \mid L_{r-m}$. Absurdo! Portanto $r = 0$.

Assim $n = 2mk$. □

4 Conclusão

Os números de Fibonacci e de Lucas constituem um tema fascinante de estudos na Teoria dos Números. Nesse trabalho, trouxemos detalhes da prova de resultados propostos por Leonard Carlitz, em 1964, sobre divisibilidade entre números de Lucas e de Fibonacci.

Referências

[1] L. Carlitz. A note on Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 2:15–28, 1964.

[2] V. E. Hoggatt. *Fibonacci and Lucas Numbers*. Santa Clara: The Fibonacci Association, California, 1 edition, 1979.