Fibrados Spinores em Hipersuperfície

Lucas Almeida & Rafael Leão & Samuel Wainer & Bernardo Vieira

Unicamp - Imecc

l229349@dac.unicamp.br

Resumo

Neste trabalho será apresentado um estudo de fibrados spinores induzidos numa hipersuperfície. Para isso, foi usado a 1-forma de conexão em fibrado principal e sua correspondência com a derivada covariante no fibrado vetorial associado, para obter o operador de Dirac associado a hipersuperfície e algumas de suas consequências. Este trabalho foi baseado em [1]

Fibrados Spinores

Seja $(M, \tilde{g})$ uma variedade spin de dimensão n e (N, g) uma hipersuperfície com estrutura spin induzida pela de M, onde $g = i^*\tilde{g}$ e $i : N \hookrightarrow M$. Assim, podemos considerar $P_{spin}(N)$ como um subfibrado de $P_{spin}(M)$ com $\Lambda : P_{spin}(M) \to P_{so}(M)$ e $\lambda : Spin(n) \to SO(n)$ as aplicações de recobrimento universal.

Se M tem dimensão par. Então, temos a relação entre os fibrados spinores:

$$\mathbb{S}(N) = P_{spin}(N) \times_\rho W \subset P_{spin}(M) \times_{\tilde{\rho}} \widetilde{W} = \mathbb{S}(M),$$

onde $\tilde{\rho} : \mathbb{C}l_n \to End_{\mathbb{C}}(\widetilde{W})$ é uma representação irredutível de $\mathbb{C}l_n$ e $\rho : \mathbb{C}l_{n-1} \to End_{\mathbb{C}}(W)$ é uma redução de $\tilde{\rho}$ pelo isomorfismo $\mathbb{C}l^0_{\underset{\sim}{n}} \simeq \mathbb{C}l_{n-1}$, $e_i \mapsto e_i \cdot e_n$, com $\rho \simeq \tilde{\rho}^{\pm}$ e $W \simeq \widetilde{W}^{\pm} \subset \widetilde{W}$ [3].

Dessa forma,

$$\mathbb{S}^+(M)|_N \simeq \mathbb{S}(N) \simeq \mathbb{S}^-(M)|_N \tag{1}$$

Se a dimensão de M é ímpar, temos apenas uma representação irredutível a menos de escalar de $\mathbb{C}l_n$. Daí temos a seguinte decomposição do fibrado spinor de N.

$$\mathbb{S}(M)|_N \simeq \mathbb{S}(N) = \mathbb{S}^+(N) \oplus \mathbb{S}^-(N) \tag{2}$$

Conexão Spinorial

Sejam $\tilde{\nabla}$ e ∇ como as conexões de Levi-Civita de M e N, respectivamente.

O referencial que será utilizado é o de Darboux, então dado $(X_1, ..., X_{n-1}, X_n) \in P_{so}(M)$ temos que $(X_1, ..., X_{n-1}) \in P_{so}(N)$ com X_n normal à N.

Seja $B : TN \to TN$ o operador forma com respeito $\nu = X_n$, $B(X) = -\tilde{\nabla}_X \nu$, temos a fórmula de Gauss clássica $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \tilde{g}(B(X), Y)\nu$, onde $X, Y \in \Gamma(TN)$ [4] página 135.

Sejam $\omega \in \Omega^1(P_{so}(M), \mathfrak{so}(\mathfrak{n}))$ a 1-forma de conexão proveniente da conexão de Levi-Civita de M e $\tilde{\omega} \in \Omega^1(P_{spin}(M), \mathfrak{spin}(\mathfrak{n}))$ induzida, como expressado no diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} TP_{spin}(M) \arrow[r, "\tilde{\omega}"] \arrow[d, "\Lambda_*"] & \mathfrak{spin}(\mathfrak{n}) \arrow[d, "\lambda_*"] \\ TP_{so}(M) \arrow[r, "\omega"] & \mathfrak{so}(\mathfrak{n}) \end{tikzcd}$$

tal que $\tilde{\omega} = \lambda_*^{-1} \circ \Lambda^* \omega$.

Dada uma seção local $s : U \subset M \to P_{so}(M)$, $v : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave e $X \in \Gamma(TM)$, temos que $\nabla^l_X[s, v] = [s, X(v) + l_*(\omega(s_*X))(v)]$, onde $[s, v]$ é uma seção e ∇^l a conexão do fibrado associado $P_{so}(M) \times_l \mathbb{R}^n$.

Proposição 1. *Seja $\Psi = [\tilde{h}, \psi]$ um campo spinor local em M, $\Lambda(\tilde{h}) = (X_1, ..., X_n)$ um frame ortonormal local em M correspondente a $\tilde{h}$. Então a derivada covariante de Ψ pode ser calculada ela fórmula*

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}^{\mathbb{S}}_X \Psi &= [\tilde{h}, X(\psi) + \tilde{\rho}_*(\tilde{\omega}(\tilde{h}_* X))(\psi)] \\ &= [\tilde{h}, X(\psi) + \frac{1}{2}\sum_{i<j} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X X_i, X_j) X_i \cdot X_j \cdot \psi] \end{aligned} \tag{3}$$

[2] página 43-44.

Seja $p \in N$ e $U \subset M$ vizinhança de p, com $\psi : U \subset M \to \widetilde{W}$, temos que

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathbb{S}}_X[\tilde{h}, \psi] &:= \left(\tilde{\nabla}^{\mathbb{S}}_X[\tilde{h}, \psi]\right)(p) \\ &= [\tilde{h}, X(\psi) + \frac{1}{2}\sum_{i<j}^{n-1} g(\nabla_X X_i, X_j) X_i \cdot X_j \cdot \psi]. \end{aligned} \tag{4}$$

Fórmula de Gauss

Sejam $\tilde{h} : U \subset M \to P_{spin}(M)$ uma seção local, $\psi : U \to \widetilde{W}$ e $\Psi = [\tilde{h}, \psi]$ seção local de $\mathbb{S}(M)$ definida em U, onde U é uma vizinhança de pontos em N. Então

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}^{\mathbb{S}}_X[\tilde{h}, \psi] &= [\tilde{h}, X(\psi) + \frac{1}{2}\sum_{i<j} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X X_i, X_j) X_i \cdot X_j \cdot \psi] \\ &= [\tilde{h}, X(\psi) + \frac{1}{2}\sum_{i<j}^{n-1} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X X_i, X_j) X_i \cdot X_j \cdot \psi] \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i<n} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X X_i, X_n) X_i \cdot X_n \cdot \psi. \end{aligned} \tag{5}$$

Aplicando um ponto $p \in N$ na expressão (5), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}^{\mathbb{S}}_X[\tilde{h}, \psi] &= (\tilde{\nabla}^{\mathbb{S}}_X[\tilde{h}, \psi])(p) \\ &= \nabla^{\mathbb{S}}_X[\tilde{h}, \psi] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{g}(B(X), X_i) X_i \cdot \nu \cdot \psi \\ &= \nabla^{\mathbb{S}}_X[\tilde{h}, \psi] + \frac{1}{2} B(X) \cdot \nu \cdot \psi \end{aligned} \tag{6}$$

A expressão (6) é conhecida como **fórmula de Gauss** para um campo spinor local $\Psi \in \Gamma(\mathbb{S}(M))$ definido numa vizinhança de N.

Operador de Dirac

Se n é par então definimos o operador de Dirac em M como:

$$\begin{aligned} \widetilde{D} : \Gamma(\mathbb{S}(M)) &\to \Gamma(\mathbb{S}(M)) \\ \sigma &\mapsto \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \tilde{\nabla}^{\mathbb{S}} \sigma \end{aligned} \tag{7}$$

tal que $\widetilde{D} = \widetilde{D}^+ + \widetilde{D}^-$ onde $\widetilde{D}^{\pm}$ estão associados aos subfibrados spinores $\mathbb{S}^{\pm}(M)$ e, consequentemente, o operador de Dirac associado a N é dado por essa soma restrita à N pela identificação (1).

Se n é ímpar então não temos a soma dos operadores, pois $\mathbb{S}(M)$ não se decompõe em soma direta de subfibrados. Dessa forma, dado $\Psi \in \mathbb{S}(N)$ uma campo spinor local, temos a seguinte relação entre os operadores de Dirac:

$$-\nu \cdot \widetilde{D}\Psi = D\Psi - \frac{n-1}{2} H \cdot \Psi + \tilde{\nabla}^{\mathbb{S}}_{\nu}\Psi, \tag{8}$$

onde H $= \frac{1}{2}$traço(B) é a curvatura média de N. Para obter (8) basta substituir (6) em (7) e fazer algumas manipulações algébricas.

Projetos Futuros

1. Estudar condições de integrabilidade sobre a I e II forma fundamental para garantir imersões isométricas através de spinores;
2. Estudar o espectro dos operadores de Dirac e sua relação com imersões isométricas.

Referências

[1] Christian Bär. Metrics with harmonic spinors. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 6(6):899–942, 1996.

[2] Jean-Pierre Bourguignon, Oussama Hijazi, Jean-Louis Milhorat, Andrei Moroianu, and Sergiu Moroianu. *A spinorial approach to Riemannian and conformal geometry*. 2015.

[3] H Blaine Lawson and Marie-Louise Michelsohn. *Spin Geometry (PMS-38), Volume 38*, volume 20. Princeton university press, 2016.

[4] John M Lee. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, volume 176. Springer Science & Business Media, 2006.