# O problema de Frobenius para semigrupos numéricos com dimensão de mergulho igual a três


## Lucas Abraão Mateus de Castro [1]

## Orientador: Fabio Enrique Brochero Martínez [2]

[1,2]Universidade Federal de Minas Gerais

[1]lucasabraaomc@gmail.com, [2]fbrochero@ufmg.br


UFMG UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

CAPES

### Introdução

Consideramos $A \subseteq \mathbb{N}$. Denotamos por $\langle A\rangle$ o *submonoide* de $(\mathbb{N},+)$ gerado por $A$, isto é,

$$\langle A\rangle = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k \;\middle|\; n, \lambda_k \in \mathbb{N} \text{ e } a_k \in A \right\}.$$

Um *semigrupo numérico* é um subconjunto $S$ de $\mathbb{N}$ que é fechado sob a adição, $0 \in S$ e $\mathbb{N} \setminus S$ tem um número finito de elementos. Nesse trabalho, são de interesse os seguintes elementos notáveis de um semigrupo numérico $S$:

- Os inteiros de $\mathbb{N} \setminus S$, as *lacunas* de $S$;
- $g(S) = |\mathbb{N} \setminus S|$, o *gênero* de $S$, onde $|\cdot|$ denota a cardinalidade;
- $F(S) = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \notin S\}$, o *número de Frobenius* de $S$;
- O *conjunto de Apéry* com respeito a $m \in S^* = S \setminus \{0\}$ definido como
$$\mathrm{Ap}(S,m) = \{0 = w(0), w(1), \ldots, w(m-1)\},$$
onde $w(i) = \min\{s \in S \mid s \equiv i \pmod{m}\}$;
- O conjunto dos *pseudo-Frobenius* definido como
$$\mathrm{PF}(S) = \{z \in \mathbb{Z} \setminus S \mid z + S^* \subseteq S\}.$$

$A$ é dito um *sistema de geradores minimal* de $S$ se $\varnothing \neq A \subseteq S$ é tal que $S = \langle A\rangle$ e nenhum subconjunto próprio de $A$ gere $S$. É bem sabido que todo semigrupo numérico $S$ tem um único conjunto de geradores minimal finito, cuja cardinalidade $e(S)$ é dita a *dimensão de mergulho* de $S$.

Encontrar fórmulas que calculem $F(S)$ e $g(S)$ em termos de um conjunto de geradores de um semigrupo numérico $S$ é conhecido como o *problema de Frobenius*. É uma questão difícil determinar fórmulas gerais e explícitas que resolvam esse problema.

- J. J. Sylvester (1882) e Curran Sharp (1883) mostraram que
$$F(\langle a_1,a_2\rangle) = a_1a_2 - a_1 - a_2$$
$$g(\langle a_1,a_2\rangle) = \frac{(a_1-1)(a_2-1)}{2}.$$
- Johnson (1960) e Rødseth (1978) mostraram as fórmulas de redução
$$F(\langle a_1,a_2,a_3\rangle) = d\,F\left(\left\langle \frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, a_3\right\rangle\right) + (d-1)a_3,$$
$$g(\langle a_1,a_2,a_3\rangle) = d\,g\left(\left\langle \frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, a_3\right\rangle\right) + \frac{(d-1)(a_3-1)}{2},$$
onde $d = \mathrm{mdc}(a_1,a_2)$. Portanto, para atacar o caso de dimensão de mergulho igual a três é suficiente considerar semigrupos numéricos com os três geradores minimais coprimos dois a dois.
- Brauer & Shockley (1962) e Selmer (1977) mostraram que dado um semigrupo numérico $S$ e $m \in S^*$ temos
$$F(S) = \max(\mathrm{Ap}(S,m)) - m,$$
$$g(S) = \frac{1}{m}\left(\sum_{w \in \mathrm{Ap}(S,m)} w\right) - \frac{m-1}{2}.$$
- Rosales (1995) mostrou que se $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e
$$A = \{0 = X(0), X(1), \ldots, X(m-1)\}$$
com $X(i) \equiv i \pmod{m}$, para todo $i \in \{0,1,\ldots,m-1\}$, temos $A = \mathrm{Ap}(\langle A \cup \{m\}\rangle, m)$ se, e somente se,
$$X(i) + X(j) \geq X((i+j) \bmod m),$$
para todos $i,j \in \{1,\ldots,m-1\}$.

Seja $S$ um semigrupo numérico com $e(S) = 3$ e geradores minimais coprimos dois a dois. Robles-Pérez & Rosales [1] observaram que existem inteiros positivos $a,b,c,d$ tais que $S = \langle a, b, bc - ad\rangle$ com $2 \leq c < a$ e $d < b$, e com essa representação, assumindo a condição adicional que $\left[\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right] \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$, mostraram que

$$\mathrm{Ap}(S,a) = \left\{ ib - \left\lfloor \frac{i}{c} \right\rfloor da \;\middle|\; i \in \{0,1,\ldots,a-1\} \right\},$$

$$g(S) = \frac{(b-1)(a-1)}{2} - d\left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor \left( a - \frac{c}{2}\left( \left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor + 1 \right) \right),$$

$$\mathrm{PF}(S) = \left\{ \left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor (cb - da) + da - b - a,\; (a-1)\,b - \left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor da - a \right\},$$

$$F(S) = \begin{cases} (a-1)b - \left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor da - a, & \text{se } 1 > \left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor \frac{c}{a} + \frac{d}{b}, \\ \left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor (cb - da) + da - b - a, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

### Nossos Resultados

**Notação:** Se $p, q \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$, escrevemos

$$(p)_q = p - \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor q \quad \text{e} \quad \left\{ \frac{p}{q} \right\} = \frac{p}{q} - \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor.$$

Assumamos

$$A = \left\{ X_i = ib - \left\lfloor \frac{i}{c} \right\rfloor da \;\middle|\; i \in \{0,1,\ldots,a-1\} \right\}$$

e $B = \{Y_i \mid i \in \{0,1,\ldots,a-1\}\}$ definido por

$$Y_i = \begin{cases} X_i, & \text{se } (i)_c < c - (a)_c, \\ X_{(i+(a)_c)_a} + X_{a-(a)_c}, & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{1}$$

onde $a,b,c,d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ são tais que $2 \leq c \leq a-1$.

**Lema.** *Sejam $S = \langle a, b, bc - ad\rangle$ e $\overline{S} = \langle B \cup \{a\}\rangle$. Se $\frac{a}{c} < \frac{b}{d} \leq \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor + 1$, então $S = \overline{S}$.*

**Teorema.** *Seja $S$ um semigrupo numérico gerado minimalmente por $a, b, bc - ad$ coprimos dois a dois. Seja $B$ o conjunto associado a $(a,b,c,d)$ como definido em (1). Se $\left[\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right] \cap \mathbb{N} = \varnothing$ e $\left\{\frac{a}{c}\right\} \leq \frac{1}{2} \leq \left\{\frac{b}{d}\right\}$, então*

$$\mathrm{Ap}(S,a) = B,$$

$$g(S) = \frac{(b-1)(a-1)}{2} - d\left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor \left( 2a - \frac{c}{2}\left( 3\left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor + 1 \right) \right) + d\left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor \left( a - \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor c \right)\left( \frac{b}{d} - \left\lfloor \frac{b}{d} \right\rfloor \right),$$

$$F(S) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor (bc - 2da) + ab - b - a, & \textit{se } 2 > \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor \left( \frac{c}{a} + \frac{d}{b} \right) + \frac{d}{b}, \\ \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor (2bc - da) + da - (a+1)\,b - a, & \textit{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\mathrm{PF}(S) = \left\{ \left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor (2bc - da) + da - (a+1)\,b - a,\; \left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor (bc - 2da) + ab - b - a \right\}.$$

### Referências


[1] A. M. Robles-Pérez, J. C. Rosales. The Frobenius problem for some numerical semigroups with embedding dimension equal to three. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 44(4):901–908, 2015.



#### Agradecimentos

Agradecemos ao IMPA pelo apoio parcial para particpar do 34º Colóquio Brasileiro de Matemática. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.