Análise de Campos Descontínuos no Plano como Problemas de Perturbação Singular

Luan Lima da Silva

UFG - Universidade Federal de Goiás

luan.lima.lemann@gmail.com

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo de campos vetoriais descontínuos no plano. O principal objetivo de tal estudo é contribuir no avanço do entendimento de equações que buscam prever o futuro de condições climáticas, que se caracteriza como um problema descontínuo. O estudo apresentado neste trabalho aplica técnicas que consistem no processo de regularização desenvolvida por Sotomayor e Teixeira, donde obtemos um problema de perturbação singular. Utilizamos a Teoria de Fenichel para obter informações da dinâmica do problema de perturbação singular. Posteriormente, tais informações são utilizadas para obtermos informações da dinâmica do campo descontínuo na região de descontinuidade.

Introdução

Estamos interessados em estudar sistemas planares suaves por partes. Neste trabalho esses sistemas são caracterizados por uma região de descontinuidade definida como uma subvariedade regular de $\mathbb{R}^2$ de codimensão 1. Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto. Definimos a variedade de descontinuidade por $\Sigma = f^{-1}(0)$, onde

$$f : K \to \mathbb{R},$$

é uma função suave e 0 um valor regular de f.

Um sistema suave por partes em K com descontinuidade Σ é dado por

$$F(x,y) = \begin{cases} F_1(x,y), & \text{se } f(x,y) \geq 0 \\ F_2(x,y), & \text{se } f(x,y) \leq 0, \end{cases} \tag{1}$$

onde F_i, $i = 1,2$, é um campo suave em K.

A depender do sinal da derivada de Lie de f na direção de F_1 e F_2, denotada por $F_i f(p) = \langle \nabla f(p), F_i(p) \rangle$ com $i = 1,2$, os pontos de Σ são classificados como pontos de costura, deslize, escape ou tangência.

Objetivos

1. Mostrar como a Teoria de Fenichel, aplicada a problemas de perturbação singular, pode ser útil no estudo de sistemas suaves por partes.
2. Coletar informações da dinâmica do campo na região de descontinuidade enquanto um problema de pertubação singular e, posteriormente, converter tais informações em dados sobre a dinâmica do campo descontínuo original na região de descontinuidade.

Preliminares

Definição 1. Dizemos que $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ é uma função de transição se $\phi(x) = -1$ para $x \leq -1$, $\phi(x) = 1$ para $x \geq 1$ e $\phi'(x) > 0$ se $x \in (-1,1)$. A $\phi-$regularização de (1) é a família de campos F_ε dada por

$$F_\varepsilon(p) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\phi_\varepsilon(f(p))}{2}\right) F_1(p) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\phi_\varepsilon(f(p))}{2}\right) F_2(p),$$

com $\phi_\varepsilon(x) = \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, para $\varepsilon > 0$.

Definição 2. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto e $\varepsilon \geq 0$. Um problema de perturbação singular em U é um sistema diferencial que pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{du}{d\tau} = f(u,v,\varepsilon) \\ \\ \dot{v} = \frac{dv}{d\tau} = \varepsilon g(u,v,\varepsilon), \end{cases}$$

ou equivalentemente, reescalando o tempo $t = \varepsilon\tau$,

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = \varepsilon\frac{dx}{dt} = f(x,y,\varepsilon) \\ \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = g(x,y,\varepsilon), \end{cases}$$

com $(x,y) \in U$ e f,g suaves em todas as variáveis.

O resultado da interação de F_1 e F_2 em Σ será dado a partir da compreensão do problema de perturbação singular obtido da regularização de (1).

Resultados

Seja Ω o conjunto dos campos C^r da forma de (1), tal que para cada campo $F \in \Omega$, existe $\eta : K \to \mathbb{R}$ também de classe C^r com parte linear identicamente nula, satisfazendo

$$\nabla \cdot \eta(F_1 - F_2) = \Pi_i(F_1 - F_2), \tag{2}$$

onde Π_i denota a projeção na base canônica, com $i = 1$ ou $i = 2$.

Teorema 1. Considere $F \in \Omega$ e F_ε uma $\phi-$regularização. Suponha que ϕ é um polinômio de grau n em um intervalo pequeno $I \subset \mathbb{R}$ com $0 \in I$. Então as trajetórias de F_ε em $V_\varepsilon = \{p \in K; F(p)/\varepsilon \in I\}$ são soluções de um problema de perturbação singular. (Demonstração disponível em [1]).

Exemplo. Tome $F_1(x,y) = (1,x)$, $F_2(x,y) = (-1,-3x)$, e $f(x,y) = y$. $\Sigma = f^{-1}(0) = \{(x,0); x \in \mathbb{R}\}$. Temos que $F_1 f = x$, $F_2 f = -3x$. Veja que o único ponto não regular (de tangência) é $(0,0)$.

Em uma vizinhança de 0, tomamos $\phi(x) = x$. Temos que

$$F_\varepsilon(x,y) = \left(\frac{y}{\varepsilon}, \frac{2xy}{\varepsilon} - x\right).$$

Uma função η que satisfaz (2) quando $i = 2$, é dada por $\eta(x,y) = x^2$. Dos passos da demonstração do Teorema 1, tomamos a mudança de coordenadas $u = x$ e $v = y - \eta(x,y)$. As trajetórias de F_ε nestas coordenadas são as soluções do problema de perturbação singular:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{u} = v + u^2 \\ \dot{v} = -u. \end{cases} \tag{3}$$

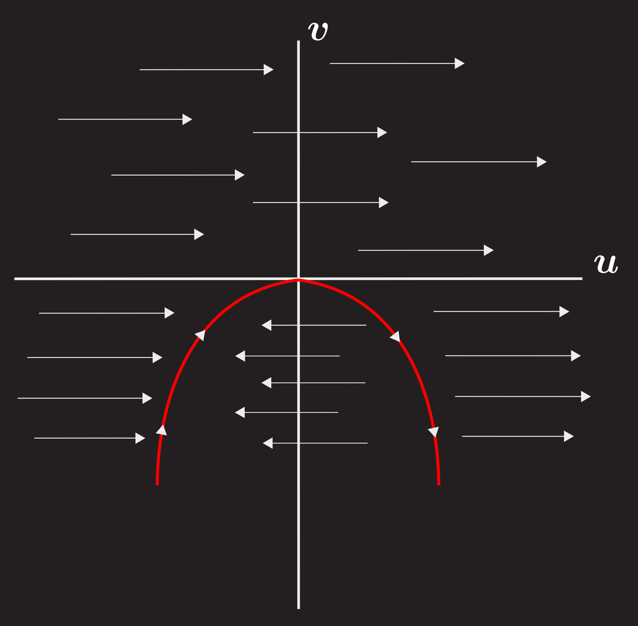

Figura 1: Variedade crítica e dinâmica lenta-rápida de (3)

Referências

[1] BUZZI, Claudio A.; DA SILVA, Paulo R.; TEIXEIRA, Marco A. A singular approach to discontinuous vector fields on the plane. Journal of Differential Equations, v. 231, n. 2, p. 633-655, 2006.

[2] BERNARDO, Mario et al. Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications. Springer Science & Business Media, 2008.

[3] KUEHN, Christian et al. Multiple time scale dynamics. Berlin: Springer, 2015.

Agradecimentos

IME INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA — UFG UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS — CAPES