Topologia fraca induzida por uma família de funções

Luan Carlos Rigoleto Fernandes & Claudete Matilde Webler Martins & Janaina Pedroso Zanchetta

Universidade Estadual de Maringá

luancarlosrigoleto@gmail.com

Introdução

Um importante resultado de Análise Funcional assegura que dado um espaço vetorial normado $(E, ||.||)$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, a bola unitária fechada $B = \{x \in E; ||x|| \leq 1\}$ é compacta na topologia da norma se, e somente se, E possui dimensão finita. Isso motiva a procura de outras topologias em E em relação às quais a bola unitária fechada seja compacta. De acordo com [3], o que é feito nessa situação é considerar em E topologias mais grossas (com menos abertos) tomando o cuidado de que os funcionais lineares contínuos na topologia da norma permaneçam contínuos nessas novas topologias. Utilizando essa situação como motivação, o objetivo desse pôster é demonstrar o seguinte resultado de topologia: dados um conjunto qualquer X, uma família de espaços topológicos $\{(Y_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ e uma família $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de funções $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ para cada $\alpha \in J$, existe uma única topologia mais grossa em X em relação à qual todas as funções f_α são contínuas.

Definições e resultados

Definição 1. *Seja X um conjunto qualquer. Uma topologia em X é uma coleção τ de subconjuntos de X, chamados abertos (ou abertos em X), que possui as seguintes propriedades:*

- *$\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$;*
- *Se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in J}$ é uma família de elementos de τ, então $\bigcup_{\lambda \in J} A_\lambda \in \tau$;*
- *Se $A_1, \cdots, A_n \in \tau$, então $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.*

Definição 2. *Um espaço topológico é um par (X, τ) em que X é um conjunto e τ é uma topologia em X.*

Exemplo 1. *Em qualquer conjunto X as coleções $\tau_t = \{\emptyset, X\}$ e $\tau_d = \mathcal{P}(X)$ (onde $\mathcal{P}(X)$ é a família de todos os subconjuntos de X) são topologias em X, denominadas topologia trivial e topologia discreta, respectivamente.*

Definição 3. *Seja X um conjunto qualquer. Uma base para uma topologia em X é uma coleção β de subconjuntos de X (chamados elementos básicos) que possui as seguintes propriedades:*

- *Para cada $x \in X$ existe $B \in \beta$ tal que $x \in B$;*
- *Se $x \in B_1 \cap B_2$, com $B_1, B_2 \in \beta$, então existe $B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3$ e $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Exemplo 2. *Em todo espaço topológico (X, τ) a topologia τ é uma base para uma topologia em X.*

Exemplo 3. *Seja (M, d) um espaço métrico. A coleção $\beta = \{B(a, r) : a \in M$ e $r > 0\}$ é uma base para uma topologia em M.*

Proposição 1. *Se X é um conjunto qualquer e β é uma base para uma topologia em X, então a coleção $\tau_\beta = \{U \subset X; \forall x \in U \ \exists B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x$ e $B_x \subset U\}$ é uma topologia em X. Além disso, τ_β coincide com a coleção de todas as uniões de elementos de β. Denominamos τ_β de topologia gerada pela base β.*

Definição 4. *Seja X um conjunto qualquer. Uma sub-base para uma topologia em X é uma coleção $\mathfrak{S}$ de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S$.*

Proposição 2. *Se X é um conjunto e $\mathfrak{S}$ é uma sub-base para uma topologia em X, então a coleção $\tau_{\mathfrak{S}}$ de todas as uniões de interseções finitas de elementos de $\mathfrak{S}$ é uma topologia em X. Denominamos $\tau_{\mathfrak{S}}$ de topologia gerada pela sub-base $\mathfrak{S}$.*

Lema 1. *Sejam X um conjunto e $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família de topologias em X. Então $\bigcap_{\alpha \in J} \tau_\alpha$ é uma topologia em X.*

Lema 2. *Sejam X um conjunto e $\mathfrak{S}$ uma sub-base para uma topologia em X. Então $\tau_{\mathfrak{S}}$ coincide com a interseção de todas as topologias em X que contém $\mathfrak{S}$.*

Definição 5. *Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é dita contínua se para todo $V \in \tau_Y$, $f^{-1}(V) \in \tau_X$.*

Lema 3. *Dados um conjunto X, um espaço topológico (Y, τ_Y) e uma função $f : X \to Y$, então a coleção $\tau_f = \{f^{-1}(U); U \in \tau_Y\}$ é uma topologia em X em relação à qual f é contínua. Além disso, uma topologia τ' em X torna f contínua se, e somente se, $\tau_f \subset \tau'$.*

Definição 6. *Sejam X um conjunto qualquer e τ_1 e τ_2 topologias em X. Dizemos que τ_1 é mais grossa que τ_2, ou que τ_2 é mais fina que τ_1, quando $\tau_1 \subset \tau_2$.*

Teorema 1. *Sejam X um conjunto qualquer, $\{(Y_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ uma família de espaços topológicos e $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família de aplicações $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ para cada $\alpha \in J$. Então*

1. *Existe uma única topologia mais grossa τ em X em relação à qual todas as funções f_α são contínuas.*
2. *A topologia τ possui $\mathfrak{S} = \bigcup_{\alpha \in J} \{f_\alpha^{-1}(U_\alpha);\ U_\alpha \in \sigma_\alpha\}$ como sub-base.*

Demonstração:

1. *Seja $\mathcal{C}$ a coleção das topologias em X em relação às quais todas as funções f_α são contínuas. Note que $\mathcal{C} \neq \emptyset$, pois a topologia discreta pertence a $\mathcal{C}$. Seja $\tau = \bigcap_{B \in \mathcal{C}} B$. Do Lema 1, segue que τ é uma topologia em X. Para cada $\alpha \in J$, denote $\tau_\alpha = \{f_\alpha^{-1}(U_\alpha);\ U_\alpha \in \sigma_\alpha\}$. Pelo Lema 3, cada τ_α é uma topologia em X e, para cada $B \in \mathcal{C}$, $\tau_\alpha \subset B$ para todo $\alpha \in J$, donde $\tau_\alpha \subset \bigcap_{B \in \mathcal{C}} B = \tau$ para todo $\alpha \in J$. Desse modo, $\tau \in \mathcal{C}$. Temos ainda que se $\tau' \in \mathcal{C}$, então $\tau = \bigcap_{B \in \mathcal{C}} B \subset \tau'$, ou seja, τ é mais grossa que τ'. Além disso, se τ_1 e τ_2 pertencem a $\mathcal{C}$ e τ_1 e τ_2 são mais grossas que qualquer elemento de $\mathcal{C}$, então $\tau_1 \subset \tau_2$ e $\tau_2 \subset \tau_1$, donde $\tau_1 = \tau_2$. Assim, τ é a única topologia mais grossa em X que torna todas funções f_α contínuas.*
2. *Uma vez que $X \in \mathfrak{S}$, pois X pertence a cada τ_α, segue que $\mathfrak{S}$ é uma sub-base para uma topologia em X. Do Lema 3, temos que $\tau' \in \mathcal{C}$ se, e somente se, $\tau_\alpha \subset \tau'$ para todo $\alpha \in J$, isto é, se $\mathfrak{S} \subset \tau'$. Isso implica que $\mathcal{C}$ coincide com a coleção das topologias em X que contém a sub-base $\mathfrak{S}$. Portanto, do Lema 2 segue que $\tau = \bigcap_{B \in \mathcal{C}} B = \tau_{\mathfrak{S}}$.*

Definição 7. *Denominamos a topologia τ do Teorema 1 de topologia fraca induzida (ou gerada) pela família $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$.*

Referências

[1] MUNKRES, J. R., *Topology*, Prentice Hall, 2000.

[2] CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D.; KOMORNIK, V. , *Introdução à Análise Funcional*, Eduem, 2011.

[3] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E., *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

[4] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer.

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora Claudete Martins, à minha co-orientadora Janaina Zanchetta e ao IMPA pela oportunidade.