A Fórmula Integral de Cauchy e Algumas de suas Consequências

Lorena B. Almeida & Elisa R. Santos

Faculdade de Matemática - Universidade Federal de Uberlândia

lore.lo2310@ufu.br & elisars@ufu.br

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é apresentar a Fórmula Integral de Cauchy e uma consequência importante, a qual diz que uma função analítica em uma região tem derivadas de todas as ordens nesse conjunto, e estas, por sua vez, são obtidas da Fórmula Integral de Cauchy por derivação sob o sinal de integração. Ainda, demonstraremos os teoremas de Morera, de Liouville e o Teorema Fundamental da Álgebra como consequências desta fórmula.

Introdução

O cálculo integral real teve seu início no final do século XVII, com o trabalho de matemáticos como Isaac Newton e Gottfried Leibniz. Newton desenvolveu o método das fluxões, que permitia calcular a área sob uma curva, enquanto Leibniz introduziu a notação diferencial e integral que utilizamos atualmente [2]. Para compreender a integral complexa, ramo que lida com funções complexas e integrais ao longo de curvas no plano complexo, é crucial mencionar a Fórmula Integral de Cauchy, formulada por Augustin Louis Cauchy no século XIX. Essa fórmula estabelece uma relação fundamental entre a integral de uma função analítica ao longo de uma curva fechada e os valores da função em pontos internos à curva, sendo uma ferramenta essencial na teoria das funções complexas e com amplas aplicações em diversas áreas da matemática e da física.

Definições preliminares

Apresentaremos, primeiramente, algumas definições preliminares sobre contornos.

Definição 1. *Um **arco** é um conjunto C de pontos dado parametricamente por*

$$C = \{z(t) = x(t) + iy(t) : a \leq t \leq b\},$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções reais contínuas de t.

Definição 2. *Chama-se **curva fechada** todo arco cujas extremidades $z(a)$ e $z(b)$ coincidem; e **curva fechada simples** toda curva fechada cujas extremidades são os únicos pontos que coincidem.*

Definição 3. *Um **arco regular** é um arco tal que a derivada $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ existe, é contínua e não se anula.*

Definição 4. *Chama-se **contorno** todo arco formado por um número finito de arcos regulares.*

Resultados principais

Nesta seção, veremos a Fórmula Integral de Cauchy e as demonstrações de algumas de suas consequências.

Teorema 5 (Fórmula Integral de Cauchy)**.** *Seja f uma função analítica em um conjunto aberto, conexo e simplesmente conexo R. Então,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,$$

onde $z \in R$ e C é qualquer contorno fechado simples de R, que envolve z uma vez no sentido positivo e cujo interior está todo contido em R.

Demonstração. Veja [1], Teorema 3.15. ∎

Agora, vejamos a consequência desta fórmula que, posteriormente, será utilizada para provar outros teoremas fundamentais na Análise Complexa.

Teorema 6. *Uma função analítica em um conjunto aberto e conexo R possui derivadas de todas as ordens, as quais, por sua vez, são também analíticas em R e podem ser obtidas da Fórmula Integral de Cauchy por derivação sob o sinal de integração.*

Demonstração. Veja [1], Teoremas 3.16 e 3.17. ∎

Por fim, veremos as demonstrações dos teoremas de Morera, de Liouville e do Teorema Fundamental da Álgebra.

Teorema 7 (Teorema de Morera)**.** *Seja f uma função contínua em um conjunto aberto e conexo R tal que*

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

para todo contorno fechado $C \subset R$. Então f é analítica em R.

Demonstração. Seja $z_0 \in R$ um ponto fixo. Note que a expressão

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

independe do caminho de integração. Como na demonstração do Teorema 3.8 de [1], F é uma função analítica em R e sua derivada é a função $F' = f$. Pelo Teorema 6, F' também é analítica em R, ou seja, f é analítica em R. ∎

Teorema 8 (Teorema de Liouville)**.** *Uma função inteira (isto é, analítica em todo o plano) e limitada é constante.*

Demonstração. Seja f a referida função e M uma constante tal que $|f(z)| \leq M$ para todo z. De acordo com o Teorema 6, temos

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta,$$

onde z é um ponto qualquer e C é um contorno arbitrário envolvendo z uma vez no sentido positivo. Em particular, tomando C como o círculo $|\zeta - z| = r$, segue que

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2}|d\zeta| \leq \frac{M}{2\pi r^2}\oint_C |d\zeta| = \frac{M}{r}.$$

Fazendo $r \to \infty$, obtemos $f'(z) = 0$ para todo z e, portanto, f é constante. ∎

Teorema 9 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Todo polinômio de grau $n \geq 1$ possui pelo menos uma raiz.*

Demonstração. Seja $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ um polinômio de grau $n \geq 1$ com $a_n \neq 0$. Suponha que $P(z)$ não se anule. Então,

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

é uma função inteira. Note que quando $z \to \infty$, temos $P(z) \to \infty$ e, consequentemente, $f(z) \to 0$. Assim, f é limitada e, pelo Teorema de Liouville, f é constante. Disso, segue que $P(z)$ é constante, o que é uma contradição. Portanto, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $P(z) = 0$. ∎

Conclusão

Neste trabalho, vimos que a Fórmula Integral de Cauchy é muito importante na Análise complexa, visto que é utilizada para demonstrar teoremas fundamentais desta e de outras áreas.

Referências

[1] ÁVILA, Geraldo. **Variáveis complexas e aplicações.** 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[2] MAOR, Eli. **e: A história de um número.** 5. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESU/MEC pelo fomento.