Analiticidade para um problema de vigas termoelásticas do tipo III

Leandro T. de Araujo & Jaime M. Rivera

UFRRJ, UFRJ

leandroaraujo@ufrrj.br

34° Coloquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 24-28 de julho de 2023.

1 Um problema Importante

O sistema de vigas termoelástico do tipo III foi estudado por muitos autores para provar a sua boa colocação e a sua estabilidade exponencial quando o tempo vai para o infinito. Neste trabalho provamos uma propriedade muito importante que é a analiticidade do semigrupo associado ao sistema o que implicará na sua estabilidade exponencial.

2 Modelo

O sistema de vigas termoelásticas do tipo III é governado pelas seguintes equações

$$\begin{cases} \rho u_{tt} + \alpha u_{xxxx} + m\theta_{txx} = 0, & (x,t) \in]0,\ell[\times]0,+\infty[, \\ c\theta_{tt} - \kappa\theta_{xx} - \kappa_0\theta_{txx} - m u_{xxt} = 0, & (x,t) \in]0,\ell[\times]0,+\infty[. \end{cases} \tag{1}$$

Aqui assumimos que

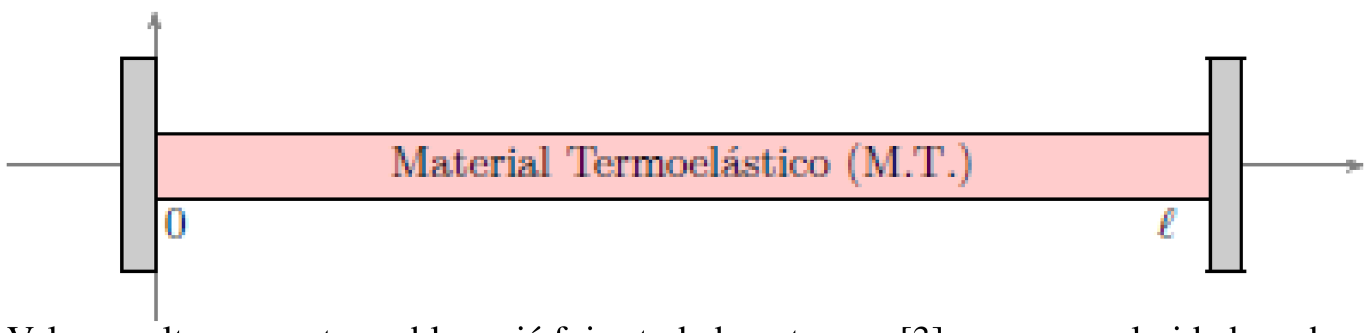
$$\rho,\ \alpha,\ c,\ \kappa,\ \kappa_0 \ \text{e}\ m$$

são constantes positivas, e consideraremos condições de Direchlet para o deslocamento e condições de Neumann para a variação de temperatura θ as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} u(0,t) = u_x(0,t) = 0, u(\ell,t) = u_x(\ell,t) = 0,\\ \theta_x(0,t) = \theta_x(\ell,t) = 0, \quad \forall t > 0, \end{aligned} \tag{2}$$

e munido das condições iniciais

$$\begin{aligned} u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x),\\ \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad \theta_t(x,0) = \theta_1(x), \quad x \in]0,\ell[. \end{aligned} \tag{3}$$



Vale ressaltar que este problema já foi estudado antes em [3], mas a regularidade e abordagem feita aqui é diferente.

3 Energia e Espaço Fase

A energia associada ao modelo (1)-(3) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(\rho|u_t|^2 + \alpha|u_{xx}|^2 + c|\theta_t|^2 + \kappa|\theta_x|^2\right)\, dx.$$

De onde temos

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_0^\ell \kappa_0|\theta_{xt}|^2\, dx. \tag{4}$$

Denotando por $u_t = v$, $\theta_t = \Theta$, e $U = (u,v,\theta,\Theta)$. Definimos o espaço de fase $\mathcal{H}$ da seguinte forma

$$\mathcal{H} = H_0^2(0,\ell)\times L^2(0,\ell)\times H_*^1(0,\ell)\times L_*^2(0,\ell),$$

onde

$$L_*^2(0,\ell) = \left\{ g \in L^2(0,\ell);\quad \int_0^\ell g(s)\, ds = 0 \right\},$$
$$H_*^m(0,\ell) = H^m(0,\ell)\cap L_*^2(0,\ell), \quad m = 1,2,\dots,$$

o qual é um espaço de Hilbert equipado com o produto interno

$$(U,U^*)_{\mathcal{H}} = \int_0^\ell \left(\rho v\overline{v^*} + \alpha u_{xx}\overline{u_{xx}^*} + c\Theta\overline{\Theta^*} + \kappa\theta_x\overline{\theta_x^*}\right) dx,$$

onde $U = (u,v,\theta,\Theta)$ e $U^* = (u^*,v^*,\theta^*,\Theta^*)$. O operador $\mathcal{A}$, para $\rho = c = 1$ é dado pela seguinte expressão

$$U = \begin{pmatrix} u\\ v\\ \theta\\ \Theta \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v\\ -\alpha u_{xxxx} - m\Theta_{xx}\\ \Theta\\ \kappa\theta_{xx} + \kappa_0\Theta_{xx} + m v_{xx} \end{pmatrix}.$$

Portanto, o sistema (1)-(3) pode ser reescrito como

$$U_t - \mathcal{A}U = 0, \quad U(0) = U_0. \tag{5}$$

com domínio $D(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H};\ \ \mathcal{A}U \in \mathcal{H}\}$ é dado por

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ U \in \mathcal{H} \;\middle|\; \begin{array}{l} v \in H_0^2(0,\ell), \quad u \in H^3(0,\ell)\\ -\alpha u_{xx} - m\Theta \in H^2(0,\ell),\\ \Theta \in H_*^1(0,\ell)\\ \kappa\theta + \kappa_0\Theta + mv \in H_*^2(0,\ell). \end{array} \right\} \tag{6}$$

Uma das principais dificuldades deste problema é que o domínio não pode ser representado na forma de um espaço de Sobolev, mas na forma de um espaço vetorial dependendo dos operadores diferenciais da equação. Além disso, podemos verificar que o operador $\mathcal{A}$ definido acima é dissipativo e vale

$$Re(\mathcal{A}U,U)_{\mathcal{H}} = -\int_0^\ell \kappa_0|\Theta_x|^2\, dx \le 0. \tag{7}$$

4 Boa Colocação

Para mostrar que o modelo é bem posto usamos o sistema resolvente associado ao modelo

$$(i\lambda I - \mathcal{A})\, U = F. \tag{8}$$

Em termos de suas componentes, o sistema resolvente pode ser escrito como

$$i\lambda u - v = f_1, \tag{9}$$
$$i\lambda v + \alpha u_{xxxx} + m\Theta_{xx} = f_2, \tag{10}$$
$$i\lambda\theta - \Theta = f_3, \tag{11}$$
$$i\lambda\Theta - \kappa\theta_{xx} - \kappa_0\Theta_{xx} - m v_{xx} = f_4, \tag{12}$$

verificando a condição de contorno

$$u(0) = u(\ell) = u_x(0) = u_x(\ell) = \theta_x(0) = \theta_x(\ell) = 0. \tag{13}$$

Note que as relações (7) e (8) implicam

$$\int_0^\ell \kappa_0|\Theta_x|^2\, dx = \text{Re}\ (U,F)_{\mathcal{H}} \tag{14}$$

Proposição 1. *Seja $\mathcal{A}$ um operador dissipativo verificando $R(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Se o espaço $\mathcal{H}$ é reflexivo então $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$.*

Demonstração. Veja [4]. □

Finalmente,

Teorema 1. *O operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo-C_0 de contrações $(S(t))_{t\ge 0}$ sobre o espaço $\mathcal{H}$. Além disso, para todo dado inicial $U_0 \in D(\mathcal{A})$ existe uma única solução do problema* (5) *verificando*

$$U \in C^1([0,\infty[,\mathcal{H}) \cap C^0([0,\infty[, D(\mathcal{A})).$$

5 Estabilidade Forte

Proposição 2 (Estabilidade Forte)**.** *O operador $\mathcal{A}$ verifica*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

Demonstração. Denotemos por

$$\mathcal{N} = \{s \in \mathbb{R}^+ :]-is, is[\subset \rho(\mathcal{A})\}.$$

Como $0 \in \rho(\mathcal{A})$, $\mathcal{N} \neq \varnothing$. Denotando $\sigma = \sup\mathcal{N}$ temos as seguintes possibilidades: $\sigma = +\infty$ ou $0 < \sigma < \infty$. O objetivo é demonstrar que $0 < \sigma < \infty$ não pode acontecer. A demonstração é feita por contradição aonde se constrói uma sequencia $U_n \in D(\mathcal{A})$ tal que $\|U_n\| = 1$ e $U_n \to 0$. □

6 Analiticidade

Para demonstrar analiticidade do Semigrupo usaremos o resultado de Zhen e Liu, a saber:

Teorema 2. *Seja $\rho(A)$ o conjunto resolvente do operador $\mathcal{A}$. Suponhamos que*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

Então, um C_0-semigrupo de contrações $T(t)$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ com a norma $||\cdot||_{\mathcal{H}}$ é analítico se, e somente se,

$$\limsup_{|\lambda|\to+\infty} ||\lambda(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Demonstração. Veja [2], p.5. □

Proposição 3 (1ª Estimativa)**.** *Suponha as condições anteriores, então para todo $\epsilon > 0$,*

$$\int_0^\ell |\lambda\theta_x|^2\, dx \le C\,\|U\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}} + C\,\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \tag{15}$$
$$\int_0^\ell |\lambda\Theta|^2\, dx \le 2\epsilon\,|\lambda|^2\,\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\,\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{16}$$

onde C e C_ϵ são constantes positivas.

A seguinte Proposição estima parte da energia potencial elástica, que é um ponto importante na prova da analiticidade.

Proposição 4 (2ª Estimativa)**.** *Suponha as condições anteriores, então para todo $\epsilon > 0$,*

$$\int_0^\ell |\lambda u_{xx}|^2 dx \le 2\epsilon|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

onde C_ϵ é uma constante positiva.

Proposição 5 (3ª Estimativa)**.** *Sob as mesmas condições anteriores temos que a solução do sistema resolvente verifica para todo $\epsilon > 0$,*

$$\int_0^\ell |\lambda v|^2 dx \le 2\epsilon|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

onde C_ϵ é uma contante positiva.

Finalmente, estamos em condições de mostrar o principal resultado desta tese.

Teorema 3. *O semigrupo associado ao sistema* (1)-(3) *é analítico.*

Demonstração. Note que da Proposição 2, $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. Agora pelas Proposição 3, Proposição 4 e Proposição 5 obtemos

$$\begin{aligned} |\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_0^\ell (|\lambda v|^2 + \alpha|\lambda u_{xx}|^2 + |\lambda\Theta|^2 + \kappa|\lambda\theta|^2)dx\\ &\le 2\epsilon|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

assim temos que $|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \le C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2$. De onde segue o resultado. □

7 Conclusões

Neste trabalho mostramos a boa colocação dos modelos de vigas termoelásticas do tipo III global. Para tal demonstração, utilizamos a teoria clássica de Semigrupos e Analise Funcional que pode ser encontrada em [1, 4]. Além disso, mostramos que a dissipação produzida é suficiente para que o modelo seja analítico. Esta propriedade é muito importante porque em particular implica nas seguintes propriedades: estabilidade exponencial do modelo, a solução possui efeito regularizante sobre os dados iniciais e a solução admite uma expansão em series de potencias convergentes no tempo.

Referências

[1] BREZIS, H. *Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, (1983)

[2] LIU,Z. & ZHENG,S. *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, CRC Research Notes in Mathematics, vol. 398, Chapman and Hall, 1999.

[3] LIU,Z. & QUINTANILLA, R. *Analyticity of solutions in type III thermoelastic plates*. IMA Journal of Applied Mathematics (2010) 75, 356-365.

[4] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Diferential Equations*. Springer-Verlag, New York,1983.

[5] RIVERA, J. Muñoz. *Estabilização de Semigrupos e Aplicações*, Serie de Métodos Matemáticos, LNCC, 2008.

[6] RIVERA, J.E. & VEGA, J. C. *Large Time Behaviour for non-simple Thermolascity with secound sound*. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017 (2017), No. 259, pp. 1-7.

Agradecimentos

Este trabalho foi desenvolvido como parte da tese de doutorado sob a orientação do Prof. Jaime M. Rivera