Geometria Enumerativa e Geometria Tropical

Larissa Reis & Flaviana Ribeiro & Joana Cruz

Universidade Federal de Juiz de Fora

larissa.reis@estudante.ufjf.br

Resumo

Neste trabalho apresentaremos algumas técnicas da geometria tropical usadas para contar o número de curvas planas complexas de gênro g e grau d, que passam por $3d+g-1$ pontos em posição geral.

Introdução

O objetivo da geometria enumerativa é contar objetos geométricos que satisfazem certas condições de incidência. Um problema enumerativo que despertou interesse de muitos foi o de determinar $N_{\text{cplx}}(g,d)$, o número de curvas algébricas em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, de gênero g e grau d, que passam por $g+3d-1$ pontos em posição geral. Os números $N_{\text{cplx}}(g,d)$ são chamados invariantes de *Gromov-Witten* do plano projetivo complexo. Em 1994, Konsevich obteve uma fórmula recurssiva para $N_{\text{cplx}}(0,d)$. Em 1998, Caporaso e Harris obtiveram relações recursivas que permitiram o cálculo dos números $N_{\text{cplx}}(g,d)$ para gêneros arbitrários. Em 2005, Mikhalkin mostrou que curvas algébricas complexas planas poderiam ser trocadas por curvas tropicais e encontrou uma fórmula combinatória para a contagem no caso tropical.

Gometria Tropical

A geometria tropical é um novo campo da geometria algébrica. Nela, variedades algébricas são trocadas por certos objetos em $\mathbb{R}^n$, lineares por partes, que podem ser estudados com ferramentas combinatórias.

O *Semicorpo Tropical* é o conjunto $\mathbb{T}=\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, com as operações $a\oplus b=\max\{a,b\}$ e $a\odot b=a+b$.

Definição 1. *Um polinômio tropical de duas variáveis é uma expressão da forma*

$$p(x,y)=\bigoplus_{i+j=0}^{d}(a_{i,j}\odot x^i\odot y^j).$$

O grau de $p(x,y)$ é o máximo das somas $i+j$ para os quais o coeficiente $a_{i,j}\neq-\infty$.

Definição 2. *A curva tropical definida pelo polinômio*

$$p(x,y)=\bigoplus_{i+j=0}^{d}(a_{i,j}\odot x^i\odot y^j),$$

denotada por T_p, é o conjunto de pontos $(x_0,y_0)\in\mathbb{T}^2$ para os quais existam pares $(i,j)\neq(k,l)$ que verifiquem

$$p(x_0,y_0)=a_{i,j}+ix_0+jy_0=a_{k,l}+kx_0+ly_0.$$

Exemplo 3. *Na figura abaixo, temos uma reta tropical definida por $p(x,y)=x\oplus y\oplus 1$ e uma cônica tropical definida por $q(x,y)=2\odot x^2\oplus -4\odot y^2\oplus 2\odot x\odot y\oplus 4\odot x\oplus 1\odot y\oplus 4$.*

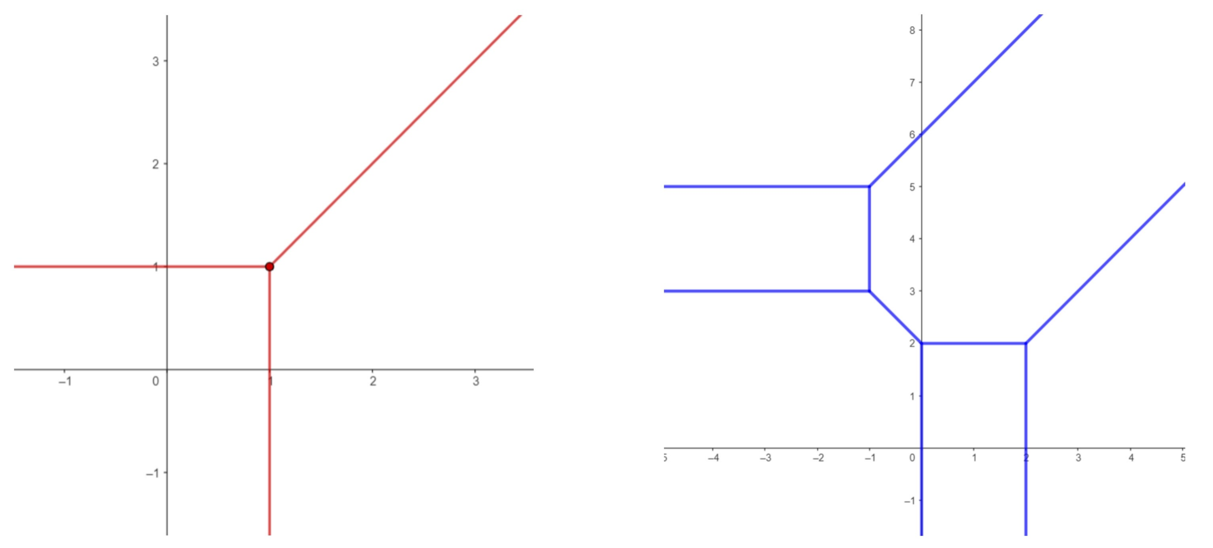

Figura 1: Reta tropical (à esquerda) e cônica tropical (à direita).

Dado o polinômio tropical

$$p(x,y)=\bigoplus_{i+j=0}^{d}(a_{i,j}\odot x^i\odot y^j);\, a_{d,0},a_{0,d}\neq-\infty,$$

seja $\Lambda_p=\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2; a_{i,j}\neq-\infty\}$. O *Polígono de Newton* de p, denotado por Δ_d, é por definição a envoltória convexa de Λ_p. Consideremos agora o conjunto $V_p=\{(i,j,a_{i,j};(i,j)\in\Lambda_p\}\subset\mathbb{R}^3$. Projetando as faces superiores da envoltória convexa do conjunto V_p, obtemos uma subdivisão de Δ_d, chamada *subdivisão de Newton de p*.

Definição 4. *Definimos o gênero de uma curva tropical como sendo o número de vértices interiores menos o número de paralelogramos da subdivisão de Newton.*

Geometria Tropical Enumerativa

Seja $N_{\text{trop}}(d,g)$ o número de curvas tropicais de grau d e gênero g passando por $3d+g-1$ pontos de $\mathbb{R}^2$ em posição geral (tropical), contadas com multiplicidade.

Teorema 5. *Para todo d e g inteiros, $d\geq 0$, vale a igualdade $N_{\text{trop}}(d,g)=N_{\text{cplx}}(d,g)$.*

Demonstração. Ver [1]. □

Para o cálculo de $N_{\text{trop}}(d,g)$, Mikhalkin usou caminhos reticulados crescentes.

Definição 6. *Um caminho $\gamma:[0,n]\to\mathbb{R}^2$ é chamado de caminho reticulado se $\gamma|_{[j-1,j]}$, $j=1,\cdots,n$, é linear afim e $\gamma(j)\in\mathbb{Z}^2$, $\forall j=0,\cdots,n$. γ é dito λ-crescente se $\lambda\circ\gamma$ é estritamente crescente, onde $\lambda:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ é dado por $\lambda(x,y)=x-\varepsilon y$ e ε é um número irracional pequeno.*

Definição 7. *Seja $\gamma:[0,n]\to\Delta_d$ um caminho reticulado λ-crescente tal que $\gamma(0)=p$ e $\gamma(n)=q$, onde $p,q\in\Delta_d$ são os pontos onde $\lambda|_{\Delta_d}$ atinge o valor mínimo e máximo. Definimos as multiplicidades $\mu_+(\gamma)$ e $\mu_-(\gamma)$ por:*

- *Se γ percorre somente $\partial\Delta_d$, definimos $\mu_\pm(\gamma):=1$.*
- *Se não, seja $k_\pm\in[0,n]$ o menor número tal que γ inclina para a esquerda (resp., para a direita para μ_-) em $\gamma(k_\pm)$. Se não existir tal $k_\pm$, fazemos $\mu_\pm(\gamma)=0$. Defina agora $\gamma'_\pm:[0,n-1]\to\Delta_d$ tal que $\gamma'_\pm(j):=\gamma(j)$, para todo $j<k_\pm$, $\gamma'_\pm(j):=\gamma(j+1)$, para todo $j\geq k_\pm$, $\gamma''_\pm:[0,n]\to\Delta_d$ tal que $\gamma''_\pm(j):=\gamma(j)$, para todo $j\neq k_\pm$ e $\gamma''_\pm(k_\pm):=\gamma(k_\pm-1)+\gamma(k_\pm+1)-\gamma(k_\pm)$. Sejam T o triângulo com vértices $\gamma(k_\pm-1)$, $\gamma(k_\pm+1)$ e $\gamma(\text{k}_\pm)$ e $\mu_\pm(\gamma):=2\cdot$ área de $T\cdot\mu_\pm(\gamma'_\pm)+\mu_\pm(\gamma''_\pm)$. Se a imagem de $\gamma''_\pm$ não está em Δ_d, definimos $\mu_\pm(\gamma''_\pm):=0$.*

$\mu(\gamma):=\mu_+(\gamma)\mu_-(\gamma)$ é chamada multiplicidade de γ.

Definição 8. *$N_{\text{path}}(d,g)$ é o número de caminhos reticulados λ-crescentes $\gamma:[0,3d+g-1]\to\Delta_d$ tais que $\gamma(0)=p$ e $\gamma(3d+g-1)=q$, contando com as suas multiplicidades.*

Teorema 9. *Para todo d e g inteiros e $d\geq 0$, vale a igualdade $N_{\text{trop}}(d,g)=N_{\text{path}}(d,g)$.*

Demonstração. Ver [1] □

Exemplo 10. *A imagem a seguir mostra todos os caminhos λ-crescentes do polígono de Newton de uma curva tropical de grau 3 e gênero 0 com 8 passos. A soma das multiplicidades desses caminhos é $N_{\text{path}}(3,0)=12$. Logo, existem 12 curvas de grau 3 e gênero 0 que passam por 8 pontos em posição geral no plano projetivo complexo.*

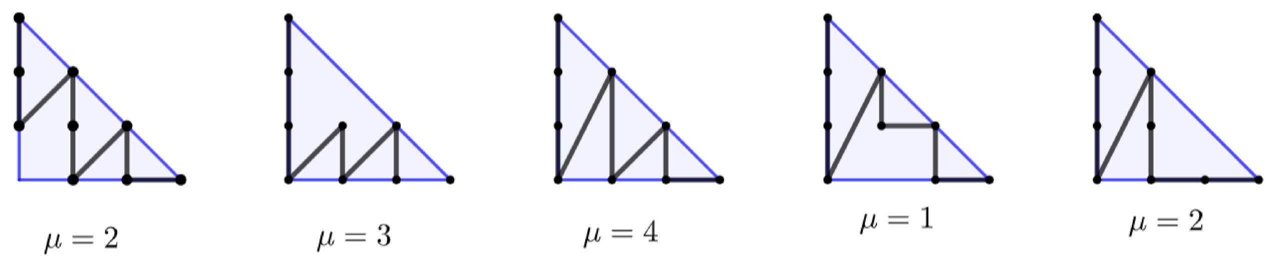

Figura 2: $N_{\text{path}}(3,0)=2+3+4+1+2=12$.

Referências

[1] MIKHALKIN, Grigory. **Enumerative tropical geometry in $\mathbb{R}^2$**. Journal of the American Mathematical Society, v. 18, n. 2, p. 313–377, janeiro, 2005.

[2] GATHMANN, Andreas; MARKWIG, Hannah. **The Caporaso-Harris formula and plane relative Gromov-Witten invariants in tropical geometry**. Mathematische Annalen, v. 338, p. 845-868, maio, 2007.

Agradecimentos

Agradeço à CAPES, ao IMPA e à UFJF pelo apoio.