Dados Intransitivos e o Teorema do Limite Central

Lael V. Lima **Joao P. C. de Paula** **Joao V. A. Pimenta** **Luis G. C. Bueno**
Guilherme L. F. Silva **Daniel Ungaretti** **Tertuliano Franco**
Universidade Estadual de Campinas
laellvl14@gmail.com

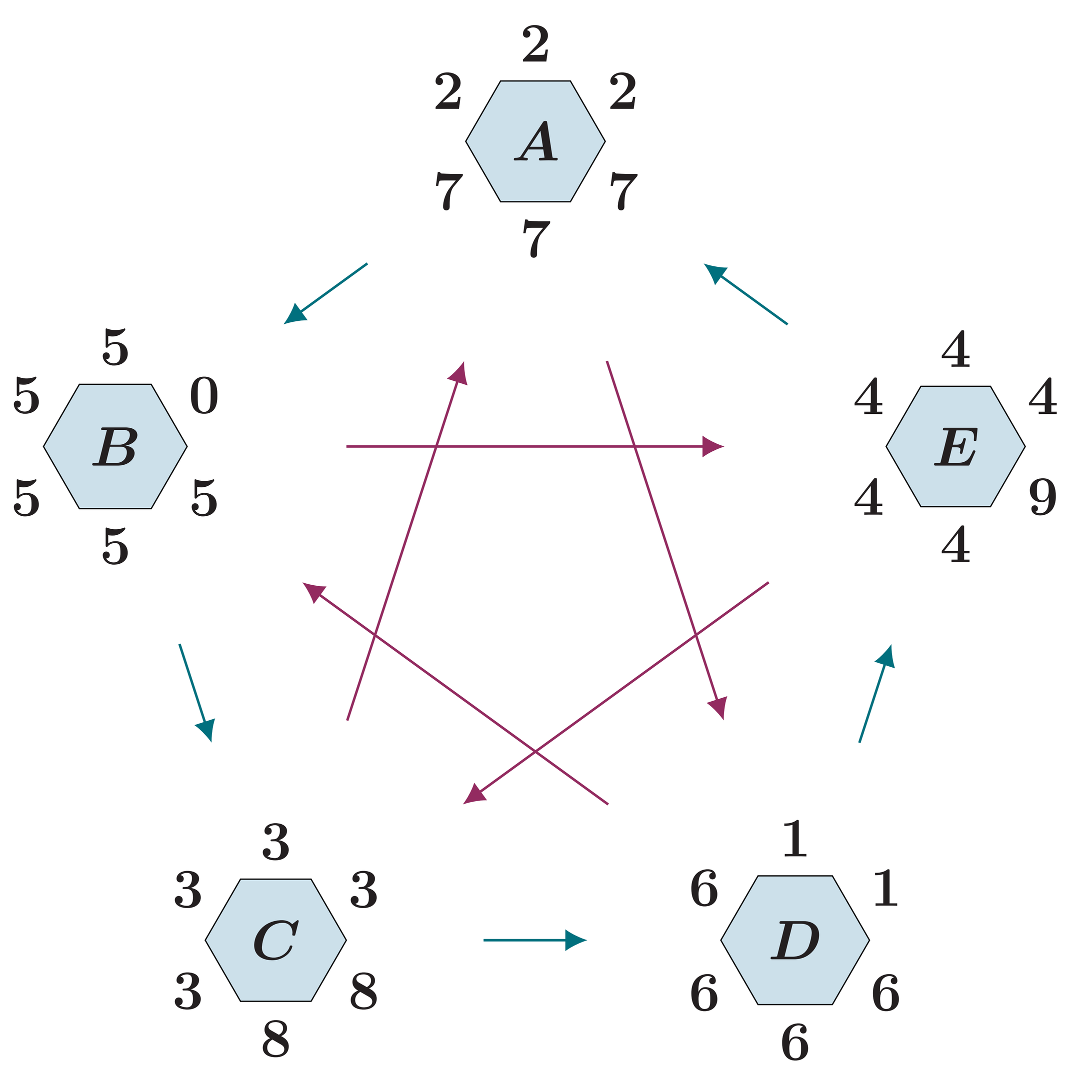
Introdução

Sejam A, B dados com n faces enumeradas. Denotamos por ρA o resultado aleatório obtido ao rolar A. Dizemos que A é **melhor** que B, e denotamos por $A \rhd B$, se

$$\mathbb{P}(\rho A > \rho B) > \mathbb{P}(\rho B > \rho A).$$

Dizemos que os dados A, B, C são **intransitivos** se

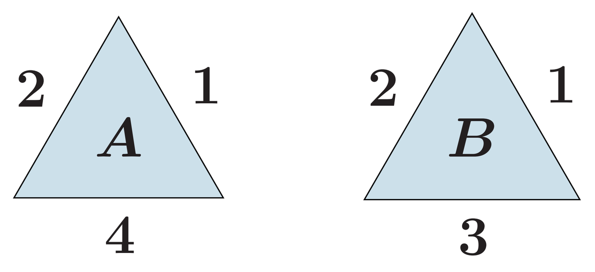
$$A \rhd B \rhd C \rhd A \quad \text{ou} \quad A \rhd C \rhd B \rhd A.$$



Suponha que A e B têm faces $A_1, \dots, A_n$ e $B_1, \dots, B_n$, respectivamente. O **número de vitórias** de A sobre B é

$$N_{A>B} = \sum_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le k\le n}} \chi_{A_i > B_j}.$$

Se os dados A e B são honestos, perceba que $A \rhd B$ se, e somente se $N_{A>B} > N_{B>A}$.



Sejam $D_n^{(1)}, D_n^{(2)}$ e $D_n^{(3)}$ dados aleatórios com n faces, onde cada face é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. *Qual é a probabilidade de tais dados serem intransitivos?*

Distribuição Limite do Número de Vitórias

Seja (X, Y, Z) a normal multivariada com média $\mu = 0$ e matriz de covariância

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

e $\widetilde{\mathcal{N}}_n^{(i)}$ a padronização da variável $\mathcal{N}_n^{(i)} = N_{D_n^{(i)} > D_n^{(i+1)}}$.

Teorema. *O vetor aleatório* $(\widetilde{\mathcal{N}}_n^{(1)}, \widetilde{\mathcal{N}}_n^{(2)}, \widetilde{\mathcal{N}}_n^{(3)})$ *converge em distribuição para* (X, Y, Z).

Dem.

- É suficiente mostrar que se $\alpha_i \in \mathbb{R}$, então

$$W_n = \alpha_1 \widetilde{\mathcal{N}}_n^{(1)} + \alpha_2 \widetilde{\mathcal{N}}_n^{(2)} + \alpha_3 \widetilde{\mathcal{N}}_n^{(3)}$$

converge em distribuição à

$$W = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z.$$

Para isso, utilizamos o método dos momentos.

- O t-ésimo momento de W, $\mathbb{E}[W^t]$, é 0 se t é ímpar e

$$(t-1)!!(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3)^{t/2},$$

se t é par.

Ora,

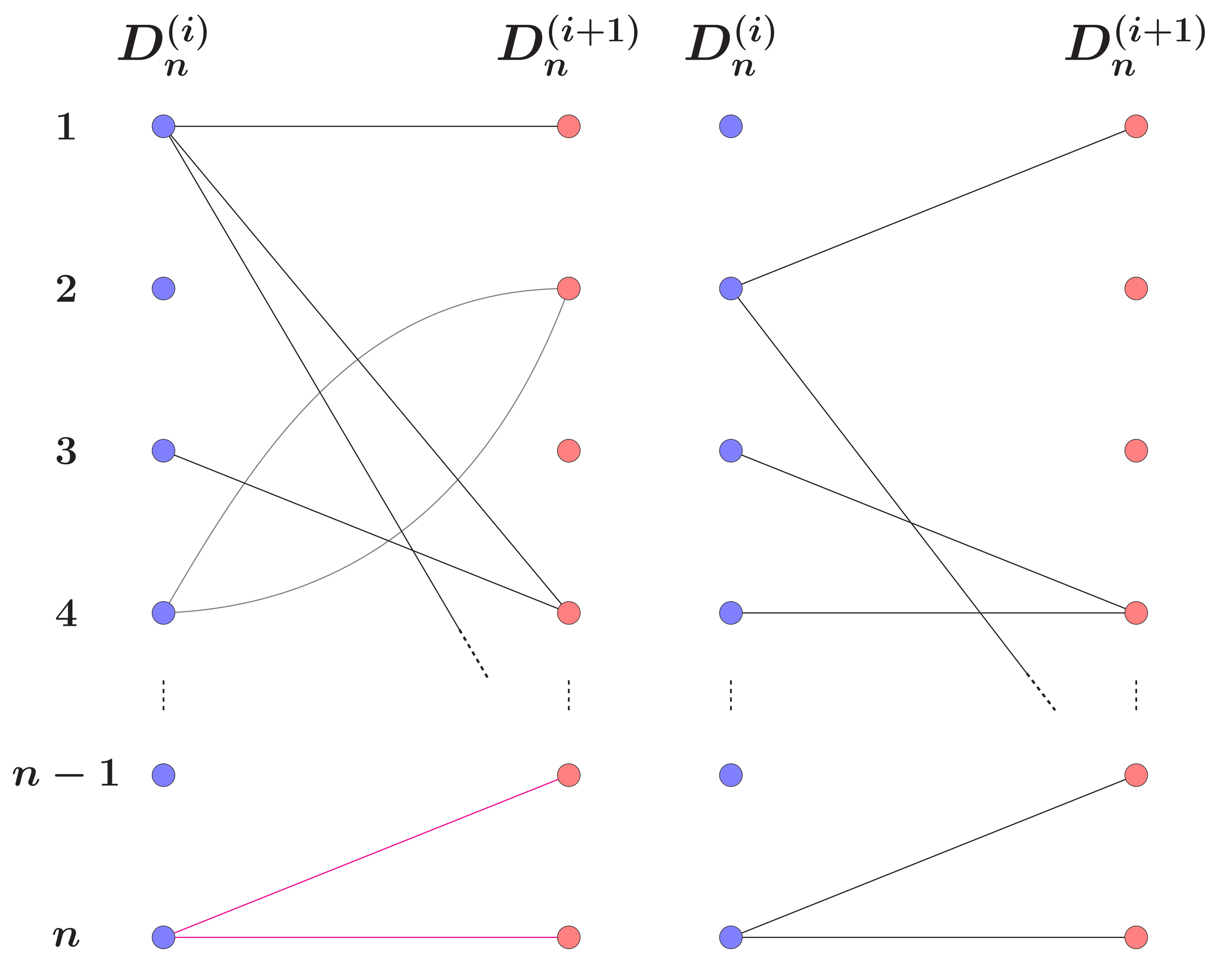
$$\alpha_i \widetilde{\mathcal{N}}_n^{(i)} = \sum_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le l\le n}} \alpha_i \frac{\chi_{D_{n_k}^{(i)} > D_{n_l}^{(i+1)}} - \mathbb{E}[\chi_{D_{n_k}^{(i)} > D_{n_l}^{(i+1)}}]}{\sigma} = \sum_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le l\le n}} \mathfrak{e}_{kl}^{(i)}.$$

Portanto, se $E = \{\mathfrak{e}_{kl}^{(i)} : 1 \le i \le 3; 1 \le k, l \le n\}$, então

$$W_n = \sum_{e \in E} e$$

e

$$\mathbb{E}\left[W_n^t\right] = \sum_{e_1 \in E} \cdots \sum_{e_t \in E} \mathbb{E}\left[e_1 e_2 \dots e_t\right]. \tag{1}$$



Obtemos que se t é ímpar, a soma (1) não passa de $o(1)$, e, se t é par, a soma é

$$(t-1)!!(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3)^{t/2} + o(1),$$

donde segue o resultado. □

Corolário. $\lim_n \mathbb{P}(D_n^{(1)}, D_n^{(2)}, D_n^{(3)}$ *são intransitivos*$) = 0$.

Conclusão

Os dados intransitivos formam um jogo contra-intuitivo, na medida em que quebra as expectativas ao satisfazer uma “ordenação” incomum.

Estudar o comportamento de tal jogo nos permitiu demonstrar uma variação do teorema do limite central com uma demonstração que pode facilmente ser generalizada.

Referências

[1] Patrick Billingsley. *Probability and Measure*. John Wiley & Sons, Inc, 3 edition, 1995.

[2] Calyampudi Radhakrishna Rao. *Linear Statistical Inference and its Applications*. John Wiley & Sons, Inc, 2 edition, 1973.

Agradecimentos

Pesquisa desenvolvida com utilização dos recursos computacionais do Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria (CeMEAI) financiados pela FAPESP.