Teoria de Incidência com pseudo-ordinais

Kevyan U. de Moraes[1] & Adonai S. Sant'Anna

Universidade Federal do Paraná - Departamento de Matemática

kevyan.uehara@ufpr.br, adonai@ufpr.br

UFPR UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Resumo

Descrevemos um sistema formal $\mathfrak{I}$ onde qualificamos planos onde "n pontos definem uma única reta", com mínimo de k pontos não colineares. O objetivo é definir esses planos, chamados de (n,k)-planos de incidência, independentemente de teorias de conjuntos. O sistema deve possibilitar a qualificação do significado de "n pontos". Para tal, nos inspiramos em afirmações do tratado de Euclides. Apesar desse objetivo, concluímos que o sistema ZFU (ZF + Urelemente) é modelo de $\mathfrak{I}$, mostrando uma relação entre teoria de conjuntos e o tratado de Euclides.

Introdução

O sistema $\mathfrak{I}$ é de primeira ordem, com identidade [5] e uma letra predicativa $(\rightarrowtail)$, chamada "incidência". Todos os termos do sistema são chamados de qlines (do inglês *quasi lines*). A fórmula $a \rightarrowtail b$ é lida como "a incide sobre b", "b é incidido por a". Definimos que $(x \not\rightarrowtail y) \mathrel{\vdots} \neg(x \rightarrowtail y)$. A fórmula $a \not\rightarrowtail b$ é lida como "a não incide sobre b" ou "b não é incidido por a".

Axiomas

Na geometria de Euclides, um ponto é definido como "aquilo de que nada é parte." [1, p. 97]. Isto é interpretado com o seguinte axioma:

Axioma 1 (Indivisíveis)**.** *Existem ao menos duas qlines que não são incididss por nenhum outro termo:*

$$\exists p \exists q(p \neq q \wedge \forall r(r \not\rightarrowtail p \wedge r \not\rightarrowtail q))$$

Então definimos o seguinte predicado monádico:

$$\mathcal{I}(r) \mathrel{\vdots} \forall p(p \not\rightarrowtail r)$$

Se r é tal que $\mathcal{I}(r)$, dizemos que r é **indivisível**. Caso contrário, dizemos que r é **divisível**. O próximo axioma diz que há ao menos uma "reta" de todos os indivisíveis.

Axioma 2 (Reta primordial)**.**

$$\exists r \forall a(\mathcal{I}(a) \iff a \rightarrowtail r)$$

E o seguinte axioma vai garantir que essa "reta dos indivisíveis" é única. Desse modo, essa qline é uma constante e a denotamos como 0.

Axioma 3 (Extensionalidade)**.**

$$\forall r \forall s(\neg(\mathcal{I}(r) \vee \mathcal{I}(s)) \wedge \forall p(p \rightarrowtail r \Leftrightarrow p \rightarrowtail s) \Rightarrow r = s)$$

A "noção comum" de Euclides "*Things which coincide with one another are equal to one another*" [2, p. 155], é a inspiração para o axioma, pois sugere alguma identificação através de "pontos".

Axioma 4 (Não-colinearidade)**.**

$$\forall r \exists q(q \neq r \wedge q \not\rightarrowtail r)$$

Axioma 5 (Regularidade fraca)**.**

$$\forall p \forall r(p \rightarrowtail r \Rightarrow (p \neq r \wedge r \not\rightarrowtail p))$$

Axioma 6 (Prolongamento)**.**

$$\forall r \forall p(p \not\rightarrowtail r \Rightarrow \exists s \forall q((q \rightarrowtail r \vee q = p) \Leftrightarrow q \rightarrowtail s))$$

O axioma do prolongamento nos permite: a construção de pares, pares ordenados (no sentido de Kuratowski), funções e pseudo ordinais finitos. Esses últimos são abreviados como polines (do inglês *Pseudo ordinal lines*). A qline $\{0\}$ é a poline 1. O sucessor de uma qline é definida de maneira análoga a ZF, a definição de poline é recursiva e feita de maneira análoga também, mas o termo 0 não é uma poline, e serve apenas como representante no sistema posicional. Funções entre termos são qlines de pares ordenados, com uma condição de "estar bem definido". Assim conseguimos definir bijeções e cardinalidade (em um sentido preciso).

[1] Bolsista do PET - Matemática e voluntário do PIBIC

(n,k)-Planos de Incidência

Sejam n e k polines. Um par ordenado (π, ρ) é um (n,k)-Plano de Incidência se, e somente se:

p1. Ambos π e ρ tem tamanho finito;

p2. $\forall x((|x| = n \wedge x \subseteq \pi) \Rightarrow \exists_\rho r(x \subseteq r))$;

p3. $\forall_\rho r \forall_\rho s((|r \cap s| \geq n \wedge r \cap s \subseteq \pi) \Rightarrow r = s)$;

p4. $\forall_\rho r \exists x(|x| = n \wedge x \subseteq \pi \wedge x \subseteq r)$;

p5. $\exists x(|x| = k \wedge x \subseteq \pi \wedge \forall_\rho r(\neg(x \subseteq r)))$.

O próximo teorema nos permite formular exemplos de (n,k)-Planos de Incidência.

Teorema 1. *Com a tradução da tabela 1, ZFU é modelo de $\mathfrak{I}$.*

Há uma correspondência biunívoca entre polines e ordinais não limites finitos. Em outras palavras, existe uma bijeção entre $\{0\}$ e $\{\emptyset\}$. Desse modo, para (n,k)-Planos de Incidência, n e k podem ser tomados como ordinais finitos não-limites.

$\mathfrak{I}$	**ZFU**
$\forall x$	$\forall x$
$x \rightarrowtail y$	$x \in y$
$x = y$	$x = y$

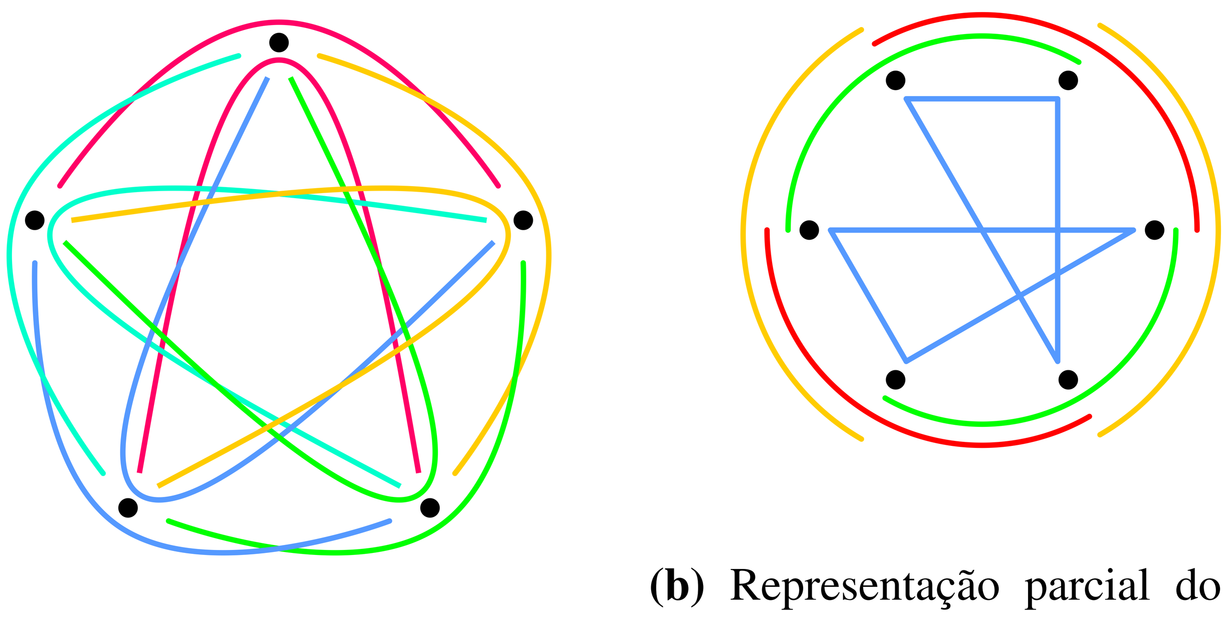
Tabela 1: Tradução de $\mathfrak{I}$ em ZFU.

Dessa maneira, conseguimos alguns exemplos de (n,k)-planos: os planos de incidência usuais formulados em ZFU são $(2,3)$-planos de incidência, desde que sejam finitos. Os planos de Möbius [6, 7] finitos são exemplos de $(3,4)$-planos já presentes na literatura. Conseguimos construir (n,k)-planos para qualquer escolha de polines n e k:

Teorema 2. *Tome π qline de tamanho finito m, e o conjunto ρ de seus subconjuntos de tamanho n. Então para todo $n < k < m$, (π, ρ) é (n,k)-plano de incidência.*

Em particular, isso nos permite construir modelos parciais de (n,k)-planos de incidência para demonstrar o seguinte:

Teorema 3. *Para todos n e k polines, as fórmulas p1, p2, p3, p4 e p5 que definem (n,k)-planos de incidência são independentes.*



(a) Exemplo de Plano de Möbius que é um $(3,5)$-plano de incidência.

(b) Representação parcial do que seria um $(3,6)$-plano de incidência, que também satisfaz o Axioma das paralelas de *Playfair*.

Figura 1: Exemplos de (n,k)-planos de incidência.

Referências

[1] Euclides. *Os elementos*. Unesp, São Paulo, 2009.

[2] Thomas Little Heath. *The thirteen books of Euclid's Elements*, volume 1. Cambridge, 2 edition, 1968.

[3] David Hilbert. *The foundations of geometry*. The Open Court Publishing, 1950.

[4] Thomas Jech. *Set theory*. Springer, 2006.

[5] Elliott Mendelson. *Introduction to mathematical logic*. CRC Press, 2015.

[6] Burkard Polster. The smallest benz planes. In *A Geometrical Picture Book*, pages 161–171. Springer, 1998.

[7] Günter F Steinke. Topological circle geometries. In *Handbook of incidence geometry*, pages 1325–1354. Elsevier, 1995.