Um estudo sobre álgebras de quatérnios

Kaiky Yuji Ishiy

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Gisele Teixeira Paula

Universidade Federal do Paraná

kaikyishiy@gmail.com

Resumo

Este trabalho tem por finalidade apresentar as álgebras de quatérnios sobre um corpo K qualquer, bem como suas principais propriedades e classificações. Álgebras de quatérnios consistem em K-álgebras centrais simples de dimensão 4. Pode-se definir conjugação e norma em uma álgebra de quatérnios, e suas propriedades são análogas às dos complexos. Além disso, a menos de isomorfismos, existem apenas duas álgebras de quatérnios sobre os reais e somente uma sobre os complexos. Sobre os racionais, existem infinitas álgebras de quatérnios não isomorfas. O principal objetivo deste trabalho é estudar as classificações via isomorfismos entre álgebras de quatérnios sobre um corpo K qualquer, para posterior aplicação na área de geometria hiperbólica.

Introdução

Os primeiros exemplos de quatérnios surgiram quando o matemático W. R. Hamilton encontrou uma forma de multiplicar elementos de $\mathbb{R}^4$, abandonando-se a comutatividade. Posteriormente, sua ideia foi generalizada para um corpo K qualquer, o que levou aos estudos das álgebras de quatérnios.

Seja K um corpo com $\mathrm{Car}(K) \neq 2$. Uma **álgebra de quatérnios** A sobre K é um K-espaço vetorial de dimensão 4, com uma base $\{1, i, j, k\}$ e multiplicação definida por

$$i^2 = a, \;\; j^2 = b, \;\; ij = -ji = k$$

em que $a, b \in K^*$, e linearmente estendida para todo o espaço. Denota-se A por $(a, b)_K$ ou $\left(\frac{a,b}{K}\right)$.

Toda álgebra de quatérnios é um anel associativo, não comutativo e com unidade.

Exemplo: O conjunto $\mathbb{H} = (-1, -1)_{\mathbb{R}}$ dos quatérnios de Hamilton é uma álgebra de quatérnios.

Conjugação e norma

Para cada $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ em A, define-se seu **conjugado** $\overline{x}$ por

$$\overline{x} = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k.$$

Além disso, a **norma** $\mathrm{N}(x)$ de x é definida por

$$\mathrm{N}(x) = x\overline{x} = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3.$$

Observe que $\mathrm{N}(x) \in K$, seja qual for $x \in A$.

Proposição: Seja A uma álgebra de quatérnios sobre K. Para quaisquer $x, y \in A$, tem-se

$$\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}, \;\; \overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}, \;\; \overline{\overline{x}} = x,$$
$$\mathrm{N}(x) = x\overline{x} = \overline{x}x, \;\; \mathrm{N}(xy) = \mathrm{N}(x)\,\mathrm{N}(y).$$

Álgebras de quatérnios são sempre anéis de divisão?

Proposição: Seja A uma álgebra de quatérnios sobre K. Um elemento $x \in A$ possui inverso multiplicativo (à esquerda e à direita) se, e somente se, $N(x) \neq 0$. Nesse caso,

$$x^{-1} = \frac{\overline{x}}{N(x)}.$$

Portanto, A é um anel de divisão se, e somente se, todo elemento não nulo de A possui norma não nula.

Isomorfismos entre álgebras de quatérnios

Um **isomorfismo** entre álgebras de quatérnios A e A' sobre um corpo K é um isomorfismo de anéis $\varphi : A \to A'$ tal que $\varphi(c) = c$ para todo $c \in K$.

Seja A uma álgebra de quatérnios sobre K. Uma base $\{1, u, v, uv\}$ de A é chamada **base quaterniônica** de A quando $u^2, v^2 \in K^*$ e $uv = -vu$.

É possível encontrar isomorfismos entre álgebras de quatérnios ao olhar para suas bases quaterniônicas.

Proposição: Se $\{1, u, v, uv\}$ é uma base quaterniônica de $(a, b)_K$, com $u^2 = p$ e $v^2 = q$, então $(a, b)_K \simeq (p, q)_K$.

Exemplo: Sejam $a, b \in K^*$. Então:

1. $(a, b)_K \simeq (b, a)_K$.
2. $(a, b)_K \simeq (a, -ab)_K$.
3. $(a, b)_K \simeq (ax^2, by^2)_K$, para todos $x, y \in K^*$.

O anel das matrizes 2x2 sobre K é uma álgebra de quatérnios

Lema: Dado $a \in K^*$, tem-se $(a, 1)_K \simeq M_2(K)$.

Teorema: Dados $a, b \in K^*$, tem-se $(a, b)_K \simeq M_2(K)$ se, e somente se, a equação $ax^2 + by^2 = 1$ possui solução (x, y) em K.

Álgebras de quatérnios sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$

Proposição: Dados $a, b \in \mathbb{R}^*$, tem-se

$$(a, b)_{\mathbb{R}} \simeq \begin{cases} \mathbb{H}, \text{ se } a < 0 \text{ e } b < 0, \\ M_2(\mathbb{R}), \text{ se } a > 0 \text{ ou } b > 0. \end{cases}$$

Proposição: Dados $a, b \in \mathbb{C}^*$, tem-se $(a, b)_{\mathbb{C}} \simeq M_2(\mathbb{C})$.

As Proposições acima mostram que, a menos de isomorfismos, existem apenas duas álgebras de quatérnios sobre $\mathbb{R}$, e apenas uma sobre $\mathbb{C}$.

Álgebras de quatérnios sobre $\mathbb{Q}$

Proposição: Sejam $p, q \in \mathbb{Z}$ primos distintos tais que $p \equiv 3 \bmod 4$ e $q \equiv 3 \bmod 4$. Então $(-1, p) \not\simeq (-1, q)$.

A Proposição acima mostra que existem infinitas álgebras de quatérnios não isomorfas. Com efeito, existem infinitos primos distintos congruentes a 3 módulo 4.

Classificações das álgebras de quatérnios

Teorema: Seja A uma álgebra de quatérnios sobre K. Então ou A é um anel de divisão ou $A \simeq M_2(K)$.

Álgebras centrais simples de dimensão 4

Uma álgebra A sobre K é chamada **central**, se o centro de A é K, e **simples**, se os únicos ideais de A são $\{0\}$ e A.

Teorema: Seja K um corpo com $\mathrm{Car}(K) \neq 2$. São equivalentes as seguintes afirmações:

1. A é uma álgebra de quatérnios sobre K.
2. A é uma álgebra central simples de dimensão 4 sobre K.

Objetivos futuros

Estudar grupos Fuchsianos aritméticos, que são uma classe importante de grupos discretos de isometrias do plano hiperbólico, e sua relação com álgebras de quatérnios.

Referências

[1] Keith Conrad. Quaternion algebras. *lecture notes, Math. Dept., Univ. Connecticut*, 2016.

[2] Gregory Cosac. On the geometry of semi-arithmetic riemann surfaces. *Tese de doutorado, IMPA*, 2021.

[3] Colin Maclachlan and Alan Reid. *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*. Springer, 2003.

Agradecimentos

À Professora Gisele, por ter me orientado até aqui. Ao PET Matemática UFPR, pela oportunidade de realizar este estudo, e também pela bolsa de participação no programa. E a todos que me apoiaram até este momento.