Extensão e Globalização de Ações Parciais de Grupoides sobre Anéis Semiprimos

Juliana Camile do Nascimento & Laerte Bemm & Wagner de Oliveira Cortes

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

julianacamile5@gmail.com

impa
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Sejam R um anel semiprimo e Q o seu respectivo anel de quocientes de Martindale à direita. Dada uma ação parcial α de um grupoide G sobre R, descrevemos a sua extensão α^* de G sobre Q. A partir de α^*, estudamos condições necessárias e suficientes para que α seja globalizável. Em particular, sob hipóteses apropriadas, mostramos que existe globalização, a qual é única a menos de equivalência quando semiprima.

Introdução

A noção de ações parciais de grupoides foi introduzida por Bagio e Paques em [1]. Nesse artigo, os autores apresentam condições necessárias e suficientes para a existência de uma ação envolvente no caso em que o anel possui unidade. Tal resultado é, portanto, aplicável ao anel de quocientes de Martindale à direita (esquerda) de um anel semiprimo, já que sempre admite unidade.

Sob essa perspectiva, dada uma ação parcial α de um grupoide G sobre um anel semiprimo R, a construção de uma extensão α^* ao anel de quocientes de Martindale à direita Q de R possibilita um estudo mais eficiente de propriedades de R e α, como a existência de ação envolvente.

Tal extensão foi desenvolvida para o caso de grupos em [3] e difere do caso de grupoides essencialmente no uso de ferramentas mais delicadas, uma vez que devemos considerar ideais de ideais em vez de ideais do anel todo, e as composições de ações estarão definidas parcialmente, para alguns pares de elementos do grupoide.

Resultados

A princípio, vamos recordar algumas noções e notações. Um *grupoide* G é uma categoria pequena na qual todo morfismo possui um inverso. Denotaremos por $r(g)$ a identidade à esquerda de um elemento $g \in G$ e por G_0 o conjunto das identidades de G.

Definição 1. *Uma* ação parcial α *de um grupoide* G *sobre um anel* R *é um par*

$$\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$$

em que, para cada $g \in G$, $D_{r(g)}$ *é um ideal de* R, D_g *é um ideal de* $D_{r(g)}$, $\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$ *é um isomorfismo de anéis e as seguintes condições são satisfeitas, para quaisquer* $e \in G_0$ *e* $(g,h) \in G^2$:

(i) α_e *é a aplicação identidade* I_{D_e} *de* D_e;

(ii) $\alpha_h^{-1}(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$;

(iii) $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$, *para todo* $x \in \alpha_h^{-1}(D_{g^{-1}} \cap D_h)$.

Notemos tal ação é global se, e somente se, $D_g = D_{r(g)}$, para todo $g \in G$.

Definição 2. *Uma ação global* $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ *de um grupoide* G *sobre um anel* T *é dita uma globalização (ação envolvente) de uma ação parcial* $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ *de* G *sobre um anel* R *se, para cada* $e \in G_0$, *existe um monomorfismo de anéis* $\varphi_e : D_e \longrightarrow E_e$ *de modo que as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(i) $\varphi_e(D_e)$ *é um ideal de* E_e;

(ii) $\varphi_{r(g)}(D_g) = \varphi_{r(g)}(D_{r(g)}) \cap \beta_g(\varphi_{r(g^{-1})}(D_{r(g^{-1})}))$;

(iii) $\beta_g \circ \varphi_{r(g^{-1})}(a) = \varphi_{r(g)} \circ \alpha_g(a)$, *para todo* $a \in D_{g^{-1}}$;

(iv) $E_g = \sum_{r(h)=r(g)} \beta_h(\varphi_{r(h^{-1})}(D_{r(h^{-1})}))$.

Para um anel R arbitrário, denote por $\mathcal{M}(R)$ o anel de multiplicadores de R.

Teorema 1. *Sejam* R *um anel semiprimo,* G *um grupoide e* α *uma ação parcial de* G *sobre* R. *Suponhamos que todos os ideais* D_g *são fechados* ($g \in G$) *e, para quaisquer* $a \in D_{r(g^{-1})}$ *e* $g \in G$ *com* $e = r(g) \in G_0$, *exista* $\gamma_g(a) \in \mathcal{M}(D_{r(g)})$ *tal que*

(i) $D_{r(g)}\gamma_g(a) \subseteq D_g$;

(ii) $\gamma_g(a)|_{D_g} = \alpha_{g^{-1}} r_a \alpha_g|_{D_g}$ *como multiplicadores à direita, ou seja,* $x\gamma_g(a) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)a)$, *para todo* $x \in D_g$;

(iii) $\gamma_g(a)D_{r(g)} \subseteq D_g$.

Então α *possui uma ação envolvente semiprima, a qual é única a menos de equivalência.*

Dado um anel semiprimo R, denotaremos por $Q = Q_{\mathcal{E}}$ o anel de quocientes de Martindale à direita de R, em que $\mathcal{E} = \mathcal{E}(R)$ é o conjunto de todos os ideais essenciais de R. Os elementos de Q provêm de R-homomorfismos à direita de algum $J \in \mathcal{E}$ à R: para quaisquer $H \in \mathcal{E}$ e R-homomorfismo $f : H \longrightarrow R$, existe $q \in Q$ tal que $qh = f(h)$, para todo $h \in H$ e, reciprocamente, se $q \in Q$ existe $F \in \mathcal{E}$ tal que $qF \subseteq R$.

Notemos que, se I é um ideal fechado de R, então $I^* = \{q \in Q \mid \text{existe } H \in \mathcal{E}(R) \text{ com } qH \subseteq I\}$ é um ideal fechado de Q.

Seja $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial de um grupoide G sobre um anel semiprimo R. A extensão α^* de G à Q é dada como segue: para todo $g \in G$, consideremos $D^*_{r(g)}$ como o ideal Q-fechado correspondente ao fecho de $D_{r(g)}$ em R. Então $D^*_{r(g)}$ é gerado por um idempotente central, e existe um isomorfismo $\psi : Q(D_{r(g)}) \longrightarrow D^*_{r(g)}$, para cada $g \in G$. Como D_g é um ideal de $D_{r(g)}$, pois α é uma ação parcial de G sobre R, definimos D^*_g como o ideal $D^*_{r(g)}$-fechado correspondente ao fecho de D_g em $D_{r(g)}$. Notemos que $\psi(D^*_g)$ é um ideal de $D^*_{r(g)}$ e, portanto, $D_g \subseteq D^*_g$ e $D_{r(g)} \subseteq D^*_{r(g)}$. Além disso, cada α_g ($g \in G$) se estende a um isomorfismo $\alpha^*_g : D^*_{g^{-1}} \longrightarrow D^*_g$. Então, $\alpha^* = (\{D^*_g\}_{g\in G}, \{\alpha^*_g\}_{g\in G})$ é uma ação parcial de G sobre Q. Mais ainda, α^* é globalizável por [1, Theorem 2.1].

Se $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ é a ação envolvente de α^*, então, para cada $e \in G_0$, existe um monomorfismo de anéis $\varphi^*_e : D^*_e \longrightarrow E_e$. A composição dos monomorfismos $\iota_e : D_e \longrightarrow D^*_e$ e φ^*_e resulta em um monomorfismo $\varphi_e : D_e \longrightarrow E_e$. Dessa forma, podemos considerar

$$T' = \prod_{e\in G_0} E'_e \quad \text{e} \quad E'_e = \sum_{r(h)=e} \beta_h(\varphi_{r(h^{-1})}(D_{r(h^{-1})})) \subseteq E_e.$$

e temos que T' é um anel e E'_e é um subgrupo aditivo de T', para todo $e \in G_0$.

Teorema 2. *Sob as notações acima, se todas as condições do Teorema 1 são satisfeitas, então* $\beta' = (\{E'_g\}_{g\in G}, \{\beta'_g\}_{g\in G})$ *é precisamente a ação envolvente semiprima de* α.

Referências

[1] BAGIO, D., PAQUES, A. *Partial Groupoid Actions: Globalization, Morita Theory and Galois Theory*. Communications in Algebra, v. 40, p. 3658-3678. 2012.

[2] CORTES, W., FERRERO, M. *Globalization of Partial Actions on Semiprime Rings*. Contemporary Math. 499 (2009), 27-35.

[3] FERRERO, M., *Partial Actions of Groups on Semiprime Rings*. A Series of Lectures Notes in Pura and Applied Mathematics, 248, Chapman and Hall, 2006.

Agradecimentos

Ao CNPq pelo apoio financeiro.