Identidades graduadas com involução para a álgebra das matrizes triangulares superiores

José Lucas Galdino da Silva e Diogo Diniz da Silva e Silva

UFCG

joselucasgaldinodasilva1997@gmail.com

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Seja F um corpo de característica zero. Neste trabalho, provaremos que se uma graduação por um grupo em $UT_m(F)$ admite uma involução graduada, então essa graduação é um "coarsening"de uma $\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$-graduação em $UT_m(F)$ e a involução graduada é equivalente a involução reflexão ou simplética em $UT_m(F)$. Essa graduação é chamada a graduação mais fina em $UT_m(F)$. Além disso, se $m \geq 4$, a álgebra $UT_m(F)$ com a graduação mais fina não satisfaz identidades monomiais não triviais. Para a graduação mais fina, uma base finita para as $\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$-identidades é exibida, com as involuções reflexão e simplética e o comportamento assintótico da $\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$-codimensão é determinado. Como uma consequência, provaremos que para qualquer G-graduação em $UT_m(F)$ e qualquer involução graduada o $(G,*)$-expoente é m. Esses resultados fazem parte da pesquisa de doutorado do discente José Lucas e foram obtidos em colaboração com o professor Dr. Diogo Diniz e Dr. Alex.

Introdução

Definição 1: Uma graduação por um grupo G (ou uma G-graduação) em uma álgebra A é uma decomposição em espaços vetoriais $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$, tais que $A_g A_h \subseteq A_{g+h}$, para todo $g, h \in G$.

Seja $g = (g_1, \dots, g_m)$ uma m-upla de elementos do grupo G. Então, $UT_m(F)$ admite uma graduação para o qual a matriz elementar $E_{i,j}$ com 1 na (i,j)-ésima entrada e 0 nas demais é homogêneo de grau $g_i - g_j$. Dizemos que essa é a graduação elementar em $UT_m(F)$ induzida por g. Valenti e Zaicev provaram em 2007 que qualquer graduação na álgebra $UT_m(F)$ é isomorfa a graduação elementar.

Definição 2: A H-graduação $A' = \bigoplus_{h \in H} A'_h$ na álgebra A é um coarsening de uma G-graduação

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

se para todo $g \in G$, existe $h \in H$, tal que $A_g \subseteq A'_h$.

Definição 3: Uma involução $*$ na álgebra A é uma aplicação linear $a \mapsto a^*$ tal que $(a^*)^* = a$ e $(ab)^* = b^* a^*$, para todo $a, b \in A$.

- Assumiremos que o grupo G é abeliano.
- Seja $X_g = \{x_{i,g}, x^*_{i,g} \mid i \in \mathbb{N}\}$, $g \in G$, uma família de conjuntos dois a dois disjuntos. A álgebra livre $F\langle X' \rangle$, livremente gerada por $X' = \cup_{g \in G} X_g$, admite uma involução, também denotada por $*$, tal que $(x_{i,g})^* = x^*_{i,g}$ e $(x^*_{i,g})^* = x_{i,g}$.
- A álgebra $F\langle X' \rangle$ também admite uma graduação por G, tal que as indeterminadas em X_g são homogêneas de grau g.
- Note que $F\langle X' \rangle$ é gerada, como uma álgebra com involução, pelo conjunto $X_G = \{x_{i,g} \mid i \in \mathbb{N}, g \in G\}$.

O polinômio $f(x_{i_1,g_1}, \dots, x_{i_n,g_n})$ é uma $(G,*)$-identidade para A se $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ sempre que $a_1 \in A_{g_1}, \dots, a_n \in A_{g_n}$. Além disso, uma substituição S for $f(x_{i_1,g_1}, \dots, x_{i_n,g_n})$ é uma upla $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$, tal que $a_i \in A_{g_i}$, $i = 1, \dots, n$.

O conjunto das $(G,*)$-identidades para A é denotado por $T_{G,*}(A)$. Observe que $T_{G,*}(A)$ é um $T(G,*)$-ideal de $F_{G,*}\langle X \rangle$, tais ideais $F_{G,*}\langle X \rangle$ são chamados $T_{G,*}$-ideais.

Resultados

Definição 4: Seja m um inteiro positivo. A $\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$-graduação elementar em $UT_m(F)$ induzida por

$(e_1, \dots, e_r, 0, e_r - e_{r-1}, \dots, e_r - e_1)$, se $m = 2r$,
$(e_1, \dots, e_r, 0, -e_r, \dots, -e_1)$, se $m = 2r+1$,

onde e_i é a upla em $\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ com i-ésima entrada igual a 1 e as demais entradas iguais a 0, é chamada a graduação mais fina em $UT_m(F)$.

Agora assuma que $UT_m(F)$ tem a graduação mais fina. A componente neutra é o subespaço das matrizes diagonais, daí

$$[x_{1,0}, x_{2,0}], \tag{1}$$

é uma $(\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, *)$-identidade para $UT_m(F)$. Consideraremos os seguintes polinômios

$$x^*_{1,g} - x_{1,g}, \text{ onde } \dim\left(UT_m(F)\right)_g = 1, \tag{2}$$

e para $m = 2r+1$ os polinômios

$$x_{1,g} x_{2,0} x_{3,h} - x_{1,g} x^*_{2,0} x_{3,h}, \tag{3}$$

onde $g = e_i, h = e_j, 1 \leq i, j \leq r$

$$x_{1,0} x_{2,g} x_{3,0} - x^*_{1,0} x_{2,g} x_{3,0} - x_{1,0} x_{2,g} x^*_{3,0} + x^*_{1,0} x_{2,g} x^*_{3,0}, \tag{4}$$

$g = e_i, i \in I_r$.

$$x_{1,0} x_{2,g} x_{3,h} - x^*_{1,0} x_{2,g} x_{3,h}, \tag{5}$$

$g = e_i, 2 \leq i \leq r, h = e_j - e_i, j \in I_i$.

Proposição 1: Os polinômios (1), (2), (3), (4) e (5) são $(\mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, *)$-identidades para $UT_m(F)$ com a graduação mais fina e a involução reflexão.

Teorema 1: Seja $G = \mathbb{Z}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$. Os polinômios (1), (2), (3), (4) e (5), junto com as identidades monomiais da forma $x_{1,g_1} \cdots x_{n,g_n}$, onde $n \leq 3$ e $g_i \neq 0$, para todo i, formam uma base para as $(G,*)$-identidades para $UT_m(F)$, com graduação mais fina e a involução reflexão.

Proposição 2: Nós temos

$$c_n^{G,*}(UT_2(F)) = (n+2)2^{n-1},$$

para $n \geq 1$. Além disso,

$$c_n^{G,*}(UT_3(F)) = 2n(n+5)3^{n-2} - (n-2)2^{n-1},$$

para $n \geq 1$.

Teorema 2: Para $UT_{2r}(F)$, com a graduação mais fina e involução simplética s, temos

$$c_n^{G,*}(UT_{2r}(F)) \sim \left(\frac{1}{2^r r^{2r-1}}\right) n^{2r-1} (2r)^n$$

Em particular,

$$\exp^{G,*}(UT_{2r}(F)) = 2r.$$

Referências

[1] O. M. Di Vincenzo, P. Koshlukov and R. La Scala. Involutions for upper triangular matrix algebras, Adv. in Appl Math. 37 (2006) 541-568.

[2] O. M. Di Vincenzo, P. Koshlukov, A. Valenti, *Gradings on the algebra of upper triangular matrices and their graded identities*, J. Algebra **275** (2004) 550–566.

[3] D. Silva; A. Ramos; J. L. Galdino. (2023) Graded identities with involution for the algebra of upper triangular matrices (Preprint)