Tipo flag e limite inferior de cociclo

João Victor Uzita

Universidade Estadual de Campinas - IMECC

j176344@dac.unicamp.br

Resumo

Seja G um grupo de Lie semi simples não compacto, com centro finito e $S \subset G$ um subsemigrupo com interior não vazio. No presente trabalho estamos interessados em estudar cotas inferiores de cociclos definidos em variedades flag, com o intuito de encontrar uma forma alternativa de classificar o tipo flag de um semigrupo.

Introdução

Sendo $S \subset G$ um subsemigrupo com interior não vazio de G, dizemos que uma variedade flag $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$, com $\Theta(S)$ subconjunto das raízes simples, é **tipo flag** de S se

1. C_Θ é contrátil para cada $h \in \mathrm{int}S$ elemento regular real, se $\Theta(S) \subset \Theta$;
2. $C = \pi_\Theta^{-1}(C_\Theta)$, se $\Theta \subset \Theta(S)$.

O estudo do tipo flag é importante para o estudo de semigrupos em grupos de Lie semi simples e suas aplicações em sistemas dinâmicos e análise harmônica.

A partir do estudo dos limites inferiores de um cociclo será estudada uma nova classificação para o tipo flag, essa nova classificação tem aplicação no estudo de expoente de momento de Lyapunov de produtos de sequências i.i.d.

Cociclos

Definição 1. *Dado uma ação $\cdot : G \times X \to X$ de um grupo G em X dizemos que uma função $\rho : G \times X \to A$ é um **cociclo** com relação à ação $\cdot$ quando*

$$\rho(gh, k) = \rho(g, h \cdot k)\rho(h, k), \; g, h \in G, \; k \in X.$$

Seja

$$G = KAN,$$

a decomposição de Iwasawa de G, definimos o cociclo $\rho : G \times K \to A$, onde $\rho(g, k)$ é a componente em A de gk. Dado $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, onde $\mathfrak{a}$ é a álgebra de Lie de A definimos $\rho_\lambda : G \times K \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\rho_\lambda(g, k) = \mathrm{e}^{\lambda \mathrm{a}(g,k)},$$

onde $\mathrm{a} = \log\rho$. A ação $\cdot : G \times K \to K$ que torna tanto ρ e ρ_λ cociclos é dada por

$$g \cdot k = u,$$

onde $gk = uan \in KAN$.

Agora podemos estender a definição desses cocilos para $G \times \mathbb{F}$, onde $\mathbb{F}$ é a variedade flag maximal, usando a identificação $\mathbb{F} = K/M$ e a proposição

Proposição 1. *Seja $P = MAN$ o subgrupo parabólico minimal, temos que*

$$\rho(g, um) = \rho(g, u), \; \forall g \in G, u \in K \text{ e } m \in M.$$

Limite inferior de cociclo

Para a prova da primeira parte do Teorema principal usamos dois Lemas auxiliares:

Lema 1. *Seja S um semigrupo com $\mathrm{int}S \neq \varnothing$ e denote por C seu conjunto de controle invariante no flag maximal $\mathbb{F}$. Sejam $x \in C_0$ e $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ e suponha que existe $d > 0$ tal que $\rho_\lambda(g, x) > d$, para todo $g \in S_x = \{h \in \mathrm{int}S : hx = x\}$. Então existe $c > 0$ tal que $\rho_\lambda(g, x) > c$ para todo $g \in S$.*

Lema 2. *Dados $\alpha \in \Sigma \setminus \Theta(S)$ e $x \in C_0$, existe $d > 0$ tal que $\rho_\alpha(g, x) > d$ para todo $g \in S_x$.*

O teorema a seguir é o resultado principal, que conecta limites inferiores de cociclos com o tipo flag de um semigrupo. Esse teorema na verdade é uma nova classificação para o tipo flag.

Teorema 1. *Seja $S \subset G$ um semigrupo com $\mathrm{int}S \neq \varnothing$ e $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$, $\Theta(S) \subset \Sigma$ seu tipo flag, onde Σ é o conjunto das raízes simples de G. Denotamos por C o conjunto de controle invariante de S na variedade flag maximal $\mathbb{F}$, então se $x_0 \in C_0$, temos que*

$$\inf_{g \in S} \rho_\alpha(g, x_0) > 0,$$

se $\alpha \in \Sigma \setminus \Theta(S)$. Além disso,

$$\inf_{g \in S} \rho_\alpha(g, x_0) = 0,$$

se $\alpha \in \Theta(S)$.

Aplicação

Vamos considerar μ uma medida de probabilidade de Borel em um grupo de Lie G, onde $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel. Definimos o espaço amostral (Ω, P), onde $\Omega = G^{\mathbb{Z}}$ e P é a medida produto. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, seja $y_n : \Omega \to G$ a variável aleatória que associa $\mathbf{y} \in \Omega$ com sua n-ésima coordenada. Então $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.).

Definição 2. *Uma medida de Borel μ em G é dita **exposta** (étalée) se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que μ^n não é singular com respeito à medida de Haar dg.*

Definição 3. *Dados $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $p \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{F}$, definimos o **momento do expoente de Lyapunov** de uma sequência i.i.d. $(g_n)_n$ pela fórmula*

$$\gamma_\lambda(p, x) = \lim_{n \to +\infty} \sup \frac{1}{n} \log \mathbb{E}[\rho_\lambda^p(g_n, x)].$$

O teorema a seguir classifica os momentos dos expoentes de Lyapunov a partir de onde λ se encontra. Este teorema é uma aplicação direta do Teorema 1.

Teorema 2. *Seja μ uma medida exposta e seja $\mathbb{F}_\Theta$, $\Theta \subset \Sigma$, o tipo flag de S_μ. Dado $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, temos que:*

1. *Se λ pertence ao subspaço gerado por Θ, então existe $p < 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{F}$ temos que $\gamma_\lambda(p, x) > 0$;*
2. *Se λ pertence ao cone convexo $\mathrm{cl}(\mathfrak{a}_\Theta^*)^+$ gerado por $\Phi \setminus \Phi_\Theta$, então para cada $x \in C$ e $p < 0$, temos que $\gamma_\lambda(p, x) \leq 0$, onde C é o conjunto de controle invariante de S_μ em $\mathbb{F}$.*

Referências

[1] San Martin, L.A.B. *Semigroups in Semi-simple Lie groups*, A ser publicado;

[2] San Martin, L.A.B. *Grupos de Lie*, Editora Unicamp, 2017;

[3] San Martin, L.A.B. *Álgebras de Lie*, Editora Unicamp, 2010;

[4] Knapp, A.W. *Lie Groups Beyond an Introduction*, Birkhäuser Boston, 1996;

[5] San Martin, L. A. B. *Semigroups and Moment Lyapunov Exponents*, Journal of Lie Theory, **30** No. 2 (2020), 587–616 (Dedicated to o Jimmie D. Lawson);