Equações de Euler-Lagrange e Equações de Hamilton

João Vitor Medeiros de Assis

Universidade Federal do Espírito Santo

joao.v.assis@edu.ufes.br

UFES

Resumo

Este pôster é parte de um projeto de iniciação científica onde se pretendia uma introdução ao Cálculo das Variações. Para isso estudaram-se as equações de Euler-Lagrange como uma forma de obter "pontos críticos" de certos funcionais, as equações de Hamilton e a relação entre essas equações via transformações de Legendre. Apresentamos aqui estas equações, relações entre elas e um exemplo.

Introdução

Este estudo das equações de Euler-Lagrange (E-L) foi motivado pelo Princípio de Hamilton que afirma que o movimento de um sistema de partículas $q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$, com uma certa configuração inicial $q(t_0)$ e final $q(t_1)$ no intervalo $[t_0, t_1]$, é curva estacionária do funcional

$$J(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})dt, \tag{1}$$

onde $L(t, q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(t, q)$, T e V são funções interpretadas como a energia cinética e potencial, respetivamente, do sistema de partículas. As equações de E-L formam um sistema de equações diferenciais cujas soluções são identificadas com curvas estacionárias de funcionais da forma (1).

Por outro lado, certos sistemas da mecânica clássica podem ser descritos por um sistema de equações conhecido por equações de Hamilton. Apresentamos abaixo as equações de E-L, as equações de Hamilton e uma relação entre estes sistemas de equações diferenciais dada pelas transformações de Legendre. Além disso, finalizamos com a concretização do exemplo do oscilador harmônico.

Objetivos

1. Estudo das equações de Euler-Lagrange e das equações de Hamilton
2. Estudo de relações entre os sistemas de equações indicados
3. Estudo do exemplo do oscilador harmônico

Resultados Estudados

Teorema 1. *Seja $J\colon C^2[t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ um funcional da forma*

$$J(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})dt,$$

onde $t_0 < t_1$, $q(t) = (q_1(t), ..., q_n(t))$ e L tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas com respeito a t, q_k e $\dot{q}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Seja

$$S = \{q \in C^2[t_0, t_1] : q(t_0) = q_0 \text{ e } q(t_1) = q_1\},$$

onde q_0, $q_1 \in \mathbb{R}^n$. Se $q \in S$ é um extremal para J, então, para cada $k = 1, \ldots, n$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \tag{EL}$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Ideia do argumento (para $n = 1$): A primeira variação de J é dada por

$$\delta J(\eta, q) = \int_{t_0}^{t_1} \eta\frac{\partial L}{\partial q} + \dot{\eta}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}dt$$

onde $q \in S$ e $\eta \in C^2[t_0, t_1]$ satisfaz $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$. Se q é um extremo local de J, então $\delta J(\eta, q) = 0$ e, por um argumento de integração por partes, segue que

$$\int_{t_0}^{t_1} \eta\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right)dt = 0,$$

para todo η, e obtemos as equações (EL).

As transformações de Legendre formalizam uma "mudança de variáveis" entre uma quádrupla $(t, q, \dot{q}, L)$ e uma quádrupla (t, q, p, H) onde a primeira "satisfaz" as equações de E-L e a segunda "satisfaz" as equações de Hamilton. Mais precisamente, temos o seguinte resultado

Teorema 2. *Seja J um funcional da forma*

$$J(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})dt,$$

onde $q(t) = (q_1(t), ..., q_n(t))$ e L é uma função suave satisfazendo

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0. \tag{2}$$

Se q é um extremal suave para J então q satisfaz as equações (EL) *e aplicando as transformações de Legendre definidas, para cada k, por*

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \text{ e } H(t, q, p) = -L(t, q, \dot{q}) + \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k p_k, \tag{3}$$

obtemos as equações de Hamilton,

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \end{cases} \tag{EH}$$

Ideia do argumento: Das hipóteses (3), segue que $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$ e $\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k}$. Se q é um extremal de J, obtemos (por (EL)) que

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \dot{p}_k$$

donde se conclui (EH).

Nota 1. *Reciprocamente, uma solução (q, p) do sistema* (EH)*, onde*

$$\det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}\right) \neq 0, \tag{4}$$

determina uma solução q de (EL)*, onde a inversa da transformação de Legendre definida em* (3) *é definida por*

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \text{ e } L(t, q, \dot{q}) = -H(t, q, p) + \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k p_k. \tag{5}$$

Nota 2. *O Teorema da Função Implícita, sob a hipótese* (2) *(ou* (4)*), garante que a (segunda) igualdade em* (3) *(respectivamente* (5)*) permite definir as variáveis $\dot{q}$ como funções de p (respectivamente, p como funções de $\dot{q}$).*

Conclusão

Concluímos esta apresentação com um exemplo.

Exemplo (Oscilador Hamônico)**.** *Um exemplo de um oscilador hamônico é dado pelo movimento de um bloco de massa m preso numa das pontas de uma mola com constante elástica k sob pequenos deslocamentos de seu ponto de equilíbrio. Uma mola ideal satisfaz a lei de Hooke, que afirma que a força exercida pela mola sob pequenas deformações é proporcional e contrária ao deslocamento a partir do ponto de equilíbrio ($q = 0$), $F = -kq$. Pela equação de Newton, obtemos a equação $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$, onde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência angular de oscilação, que é a equação* (EL) *com Lagrangiano dado por $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2$. Utilizando a transformação de Legendre dada por* (3)*, onde $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$, obtemos as equações de Hamilton desse sistema: $\dot{q} = \frac{p}{m}$ e $\dot{p} = -m\omega^2 q$.*

Referências

[1] VANBRUNT, B. *The Calculus of Variations*. Universitext, Springer (2004)

Agradecimentos

Agradeço à professora Marta Batoréo pela dedicação ao nosso trabalho.