Um Estudo Sobre Anéis Noetherianos e Aplicações

João Pedro Caldas Peixoto & Gregory Duran Cunha

Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística

joaopeixoto@discente.ufg.br, gregoryduran@ufg.br

Resumo

Neste trabalho, iremos apresentar um estudo satisfatório sobre anéis noetherianos, com ênfase no Teorema da Base de Hilbert e suas aplicações no campo da geometria algébrica, com foco especial em variedades afins.

Introdução e Objetivos

Na teoria de anéis comutativos, um anel é noetheriano se todo ideal é finitamente gerado. Estes anéis são amplamente utilizados na álgebra comutativa, geometria algébrica e teoria de singularidades. Neste contexto, um importante resultado é o Teorema da Base de Hilbert que garante que $A[x_1, \ldots, x_n]$ é noetheriano se A também for. Este teorema estabelece uma conexão entre a álgebra e a geometria, pois representa na teoria de geometria algébrica que toda variedade algébrica pode ser descrita como o conjunto solução de um número finito de equações polinomiais.

Resultados

Definição 1. *Um anel comutativo A é dito noetheriano se satisfaz qualquer uma das seguintes propriedades equivalentes:*

(i) *Todo ideal $I \subset A$ é finitamente gerado;*

(ii) *Toda cadeia ascendente de ideais estabiliza, isto é, dada uma cadeia de ideais*
$$I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$$
então $I_i = I_{i+1}$ para todo $i >> 0$ suficientemente grande;

(iii) *Todo conjunto $\mathcal{S} \neq \emptyset$ de ideais de A possui um elemento que é maximal em $\mathcal{S}$ com relação a inclusão.*

Exemplo 1. *Todo anel principal é noetheriano. Em particular, os seguintes anéis são noetherianos: $\mathbb{Z}$, $K[x]$, $\mathbb{Z}_m$, $\mathbb{Z}[i]$ e K (onde K é corpo).*

Exemplo 2. *O anel de polinômios nas variáveis $x_1, x_2, \ldots$:*
$$A[x_1, x_2, \ldots] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A[x_1, \ldots, x_n]$$
não é noetheriano, pois neste anel temos uma cadeia estritamente ascendente de ideais
$$(x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq (x_1, x_2, x_3) \subsetneq \cdots$$

Exemplo 3. *O anel $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ das funções contínuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é noetheriano: para cada $n \in \mathbb{N}$, considere I_n sendo o conjunto das funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = 0$ para todo $x \geq n$. Esta é uma cadeia infinita, estrita e ascendente de ideais.*

Teorema 1 (Teorema da base de Hilbert)**.** *Se A é um anel noetheriano então o anel de polinômios $A[x]$ é noetheriano. Consequentemente, $A[x_1, \ldots, x_n]$ é noetheriano.*

Demonstração. Seja $I \subset A[x]$ um ideal. Vamos provar que I é finitamente gerado. Defina por ℓ_f o coeficiente líder de um polinômio não nulo $f \in A[x]$. Para cada $d \geq 0$, seja $I_d = \{\ell_f : f \in I \text{ e } \partial(f) = d\} \cup \{0\}$.

Facilmente verifica-se que I_d é um ideal. Ainda mais $I_d \subset I_{d+1}$, pois se $a \in I_d$ é o coeficiente líder de $p(x) \in I$ de grau d então a também é o coeficiente líder do polinômio $xp(x) \in I$ de grau $d+1$, logo $a \in I_{d+1}$.

Assim, $I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_d \subset \cdots$ é uma cadeia ascendente de ideais do anel noetheriano A. Logo, existe $n \geq 0$ tal que $I_n = I_{n+1} = \cdots$.

Além disso, para cada $d \geq 0$, I_d é finitamente gerado, isto é
$$I_d = (\ell_{f_{1,d}}, \ldots, \ell_{f_{m_d,d}}).$$

Considere
$$J = (f_{1,d}, \ldots, f_{m_d,d} : 0 \leq d \leq n).$$

Vamos provar que $I = J$.

($\supset$): É claro que $J \subset I$, pois os geradores de J estão em I.

($\subset$): Seja $f \in I$. Se $f = 0$, acabou pois $0 \in J$. Suponha $f \neq 0$. Faremos uma indução sobre $\partial(f)$ para provar que $f \in J$. Se $\partial(f) = 0$, então $\ell_f = f \in A$ e $f \in I_0$. Mas $I_0 \subset J$. Logo $f \in J$. Agora suponha que seja verdade para todo polinômio de grau menor do que o grau de f. Como $f \in I$, então $\ell_f \in I_d$, para algum $0 \leq d \leq n$. Assim,
$$\ell_f = \sum_{i=1}^{m_d} c_i \ell_{f_i,d},$$
para alguns $c_i \in A$. Agora, considere o polinômio g definido por
$$g := f - \sum_{i=1}^{m_d} c_i x^{d_i} f_{i,d}$$
onde $d_i = \partial(f) - \partial(f_{i,d})$. Assim, $\partial(g) < \partial(f)$ e $g \in I$. Pela hipótese de indução, $g \in J$. Como
$$f = g + \sum_{i=1}^{m_d} c_i x^{d_i} f_{i,d}$$
é uma soma de dois polinômios de J, segue que $f \in J$. Portanto $I = J$, ou seja, I é finitamente gerado. $\square$

Conclusão

A seguir, para concluir, faremos uma aplicação do Teorema da Base de Hilbert. Seja K um corpo e $S \subset K[x_1, \ldots, x_n]$. A variedade algébrica afim definida por S é o subconjunto $V(S) \subset K^n$ dos zeros comuns a todos os polinômios de S. Se $I \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ é o ideal gerado por S, então $V(S) = V(I)$.

Exemplo 4. *Considere $I = ((x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2)$ ideal de $\mathbb{R}[x, y]$. Assim,*
$$V(I) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : (a^2+b^2)^2 - a^2 + b^2 = 0\}$$
é uma variedade algébrica afim irredutível de dimensão 1 (curva algébrica) que apresenta um nó na origem, com tangentes $y = \pm x$.

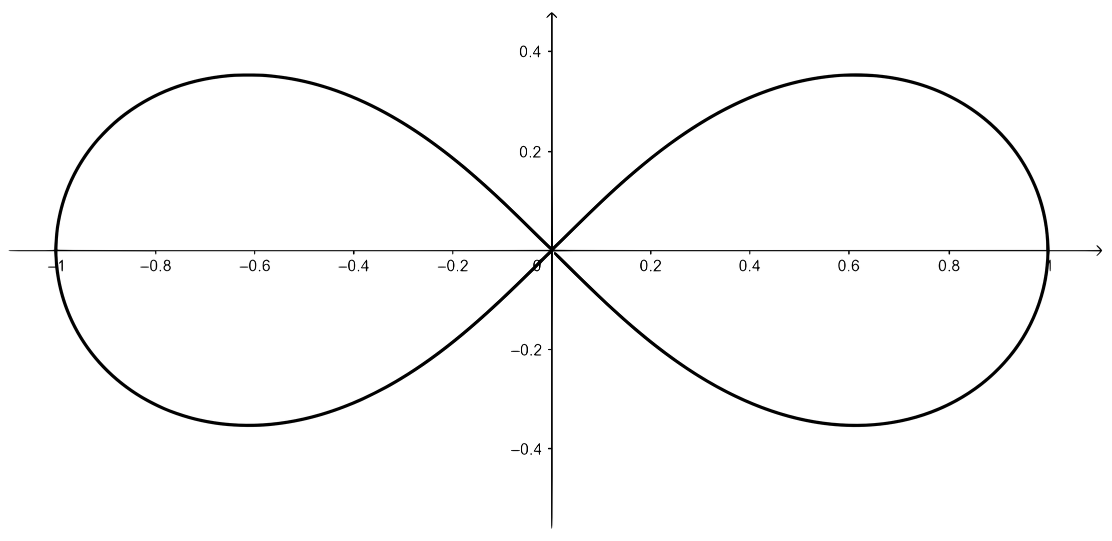

Figura 1: Lemniscata $V((x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2) \subset \mathbb{R}^2$

Visto que K é noetheriano, pelo Teorema da base de Hilbert, $K[x_1, \ldots, x_n]$ é noetheriano, ou seja, I é finitamente gerado. Isso significa que toda variedade algébrica afim pode ser descrita com o conjunto de soluções comum de uma quantidade *finita* de equações polinomiais.

Referências

[1] MARTINS, S. T.; TENGAN, E. **Álgebra exemplar:** um estudo da álgebra através de exemplos. 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

[2] GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra.** 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

Agradecimentos

É incomensurável minha gratidão ao IMPA por sua generosidade em disponibilizar-me auxilio financeiro.