Variedades unidimensionais não-Hausdorff e Folheações do Plano

João Marcos Xavier de Lima

Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais

joao.xavier.lima@icen.ufpa.br

Resumo

Neste trabalho estudamos o artigo de André Haefliger e George Reeb [2] que estabelece uma bela conexão entre folheações do plano e variedades unidimensionais possivelmente não Hausdorff. Provaremos que o espaço de folhas de uma folheação é uma variedade unidimensional simplesmente conexa e de base enumerável. Na literatura esse resultado é comumente referenciado como Teoria de Haefliger e Reeb.

Variedades n-dimensionais possivelmente não Hausdorff

Definição 1. *Uma variedade n-dimensional V_n é um espaço topológico tal que, qualquer ponto $p \in V_n$ e uma vizinhança U de p admite um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to U \subset V_n$ chamado de carta.*

O mapa de transição associado a duas cartas h_i e h_j de $\mathbb{R}^n$ em V_n com as respectivas imagens U_i e U_j é o homeomorfismo $h_j^{-1} \circ h_i$.

$$h_j^{-1} \circ h_i : h_i^{-1}(U_i \cap U_j) \to h_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

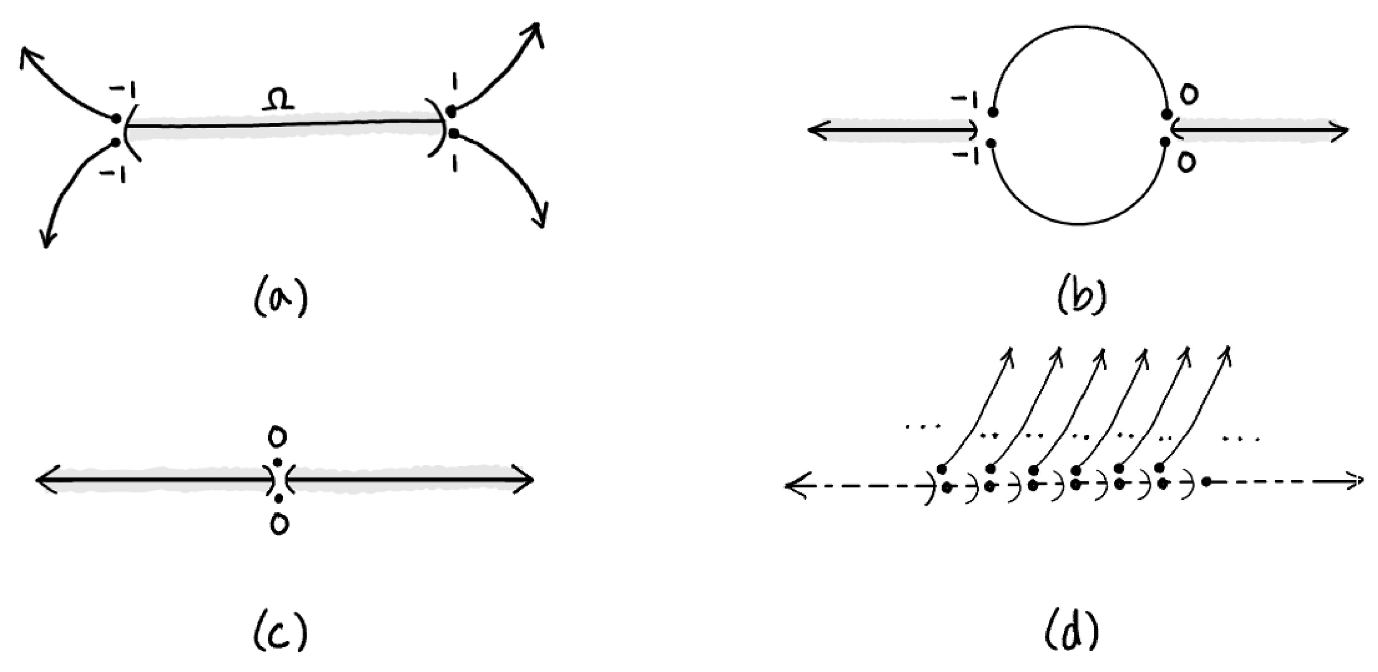
O conjunto de cartas cujas imagens cobrem V_n é chamado de um atlas $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^n$ em V_n.

Proposição 1. *Sejam V_n uma variedade n-dimensional e seja ρ uma relação de equivalência aberta em V_n para o qual cada ponto $x \in V_n$ tenha uma vizinhança U_x tal que não haja dois pontos distintos em U_x ρ-equivalentes. Então o espaço quociente $V_n' = V_n/\rho$ é uma variedade n-dimensional e o mapa quociente $p : V_n \to V_n/\rho$ é um homeomorfismo local.*

Definição 2. *Um ponto x numa variedade V_n é chamado de ponto de ramificação se existe um ponto $z \in V_n$ $(z \neq x)$ que não é separável de x, isto é, qualquer vizinhança de x tem uma intersecção não vazia com toda vizinhança de z.*

Seja R_1 e R_2 duas cópias da reta real $\mathbb{R}$. Considere um aberto Ω em $\mathbb{R}$ e a relação de equivalência ρ em que identifica pontos de R_1 e R_2 que tem a mesma coordenada $t \in \Omega$. Passando o quociente nós obtemos uma variedade 1-dimensional (possivelmente não Hausdorff). Veja alguns exemplos:

a) A ramificação dupla: Aqui $\Omega = (-1, 1)$. Os pontos de ramificações tem coordenadas -1 e 1.
b) O laço: Aqui $\Omega = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$. Os pontos de ramificações tem coordenadas -1 and 0.
c) O laço estrangulado: Aqui $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Os pontos de ramificações tem coordenadas 0.
d) A pluma simples: Aqui consideramos que para todos os pontos na reta real $\mathbb{R}$ de coordenada racional, inserimos uma ramificação simples.



Variedades Unidimensionais Simplesmente Conexas

Definição 3. *Um espaço topológico V vai ser chamado de simplesmente conexo se é conexo e se, para qualquer recobrimento conexo $(\widetilde{V}, p)$ de V, a projeção p é um homeomorfismo de $\widetilde{V}$ para V.*

Lema 1. *Se V é uma variedade 1-dimensional simplesmente conexa, então para qualquer $x \in V$, $V \setminus \{x\}$ tem duas componentes conexas.*

Proposição 2. *Seja V uma variedade unidimensional simplesmente conexa com base enumerável. Então existe uma função contínua $f : V \to \mathbb{R}$ tal que f é um homeomorfismo local.*

Folheações de Variedades Bidimensionais (V_2)

Definição 4. *Uma Folheação $\mathcal{F}$ de uma variedade bidimensional V_2 é definida por um atlas $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$ para V_2 tal que se h_i e h_j são quaisquer duas cartas em A, o mapa de transição $h_{ji} = h_j^{-1} \circ h_i$ é um homeomorfismo expresso por equações da forma:*

$$x' = g_{ji}(x, y) \qquad y' = k_{ji}(y) \tag{1}$$

Nas imagens O_i de cada carta $h_i \in \mathcal{A}$, definimos a relação de equivalência ρ_i cujas classes são as imagens de h_i restritas a $y =$ constante.

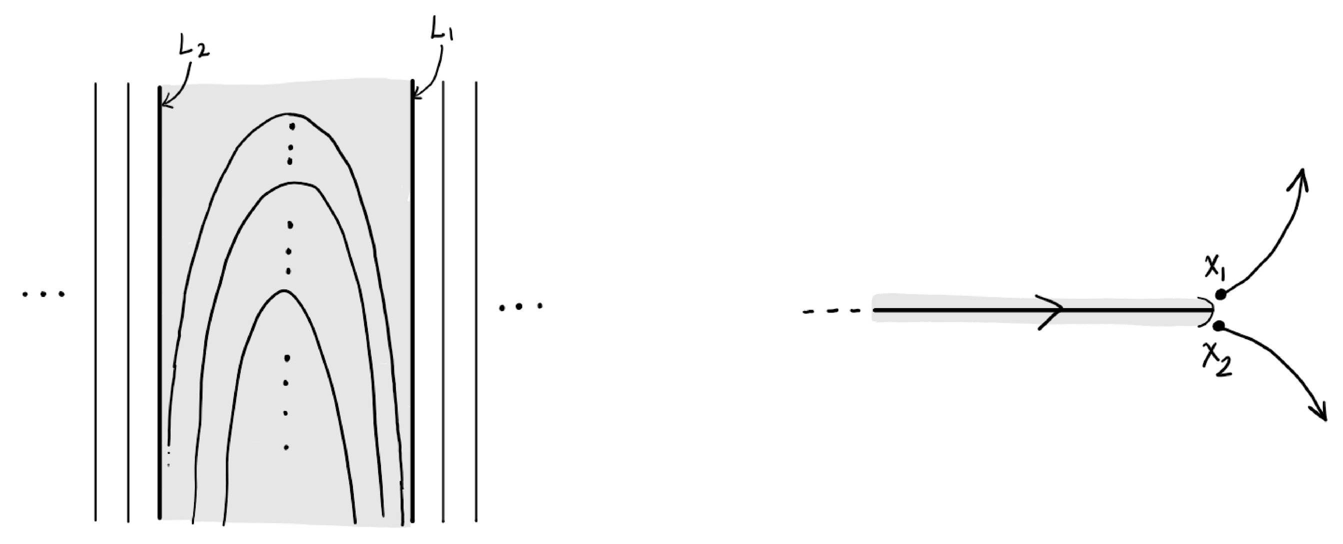
Definição 5. *As classes de ρ (gerada pelas relações ρ_i) em V_2 são chamadas de folhas da folheação.*

Definição 6. *O par (O_i, h_i) formado por um $h_i \in \mathcal{A}$ e sua imagem O_i é chamado de um aberto distinguido da Folheação $\mathcal{F}$.*

Teorema 1 (Poincaré, Bendixon). *Seja (O_i, h_i) um aberto distinguido de uma folheações de $\mathbb{R}^2$. A imagem de h_i^{-1} da intersecção de O_i com qualquer folha ou é o conjunto vazio ou é uma linha $y =$ constante.*

Proposição 3. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{R}^2$. O espaço quociente V de $\mathbb{R}^2$ pela relação de equivalência ρ associada a $\mathcal{F}$, é uma variedade unidimensional simplesmente conexa e de base enumerável.*

Exemplo da aplicação na folheação de Reeb.



Vale ressaltar que do resultado principal conseguimos demonstrar os 3 teoremas de Kamke, Kaplan e Wazewsky que são teoremas clássicos da teoria de folheações.

Obs. as ilustrações utilizadas foram retiradas de [2] .

Referências

[1] André Haefliger and Georges Reeb. Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan. *Enseign. Math.*, 3:107–126, 1957.

[2] André Haefliger and Georges Reeb. One dimensional non-Hausdorff manifolds and foliations of the plane (translated by Gangotryi Sorcar). *arXiv preprint arXiv:2208.11193*, 2022.

Agradecimentos

Ao Professor Dr. Marcel Vinhas Bertolini pelo esforço e tempo dedicado para me ajudar nesse projeto, à minha família que sempre acreditou nos meus sonhos, aos meus amigos não só da faculdade, mas também do trabalho e escola que foram centrais durante meu processo de formação e ao 34º Colóquio Brasileiro de Matemática pela oportunidade.