Comparação de normas em $\mathbb{R}^2$: uma interpretação geométrica

João Gabriel Fernandes & Patrícia Rampazo

Universidade Federal Fluminense

joaogrf@id.uff.br e prampazo@id.uff.br

Introdução

O conceito de norma, em geral, é abordado de maneira mais restrita de forma que, quando perguntado, um aluno de graduação em matemática poderia responder que a norma em $\mathbb{R}^2$ é $\sqrt{x^2+y^2}$ (norma euclidiana). Entretanto, a definição de norma permite que haja diferentes normas tanto no $\mathbb{R}^2$ quanto em outros espaços vetoriais.

A finalidade deste trabalho é expandir e apresentar esta noção de diferentes normas em um mesmo espaço vetorial, neste caso, $\mathbb{R}^n$. Para que a distinção fique clara será feita uma representação geométrica delas em $\mathbb{R}^2$. Para isso, bolas abertas em cada respectiva norma serão comparadas, explicando a razão de todo formato assumido. O software livre *Geogebra* foi utilizado para produzir as imagens.

Espaços normados

Definição 1. *Seja E um espaço vetorial. Uma função $||\cdot||_E : E \longrightarrow \mathbb{R}$ em que $x \mapsto ||x||_E$ é chamada de norma se satisfaz as seguintes propriedades:*

(N.1) $||x||_E \geq 0$ para todo $x \in E$;

(N.2) $||x||_E = 0$ se, e somente se, $x = \vec{0}$;

(N.3) $||\gamma x||_E = |\gamma|||x||_E$ para todo $x \in E$ e todo $\gamma \in \mathbb{R}$;

(N.4) $||x+y||_E \leq ||x||_E + ||y||_E$ para todo $x, y \in E$.

Um espaço normado E é um espaço vetorial com uma norma definida nele. Denota-se: $(E, ||\cdot||_E)$, sendo E o espaço normado e $||\cdot||_E$ sua respectiva norma.

Algumas normas em $\mathbb{R}^n$ são, particularmente, mais conhecidas. Dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, as normas são funções $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

A norma da soma: $||x||_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

A norma euclidiana:

$||x||_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

A norma do máximo: $||x||_\infty := \max\{|x_i|, i = 1, \cdots, n\}$.

Duas normas $||\cdot||_E^{(1)}$ e $||\cdot||_E^{(2)}$ são chamadas equivalentes se existem constantes $C_2 \geq C_1 > 0$ tais que:

$$C_1||\cdot||_E^{(1)} \leq ||\cdot||_E^{(2)} \leq C_2||\cdot||_E^{(1)}.$$

Em $\mathbb{R}^n$ as normas do máximo, norma euclidiana e a norma da soma são equivalentes, pois é possível encontrar a seguinte desigualdade:

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty.$$

Definição 2. *Sejam E um espaço vetorial, $a \in E$ e $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Define-se bola aberta de centro a e raio r como sendo o conjunto*

$$B(a,r) = \{x \in E \mid ||x-a||_E < r\}.$$

Observe que a definição de bola aberta depende da norma, ou seja, para diferentes normas haverão distintos pontos que irão satisfazer a definição. Para analisar essa diferença será usado o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e as normas apresentadas anteriormente.

• Em $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1)$,

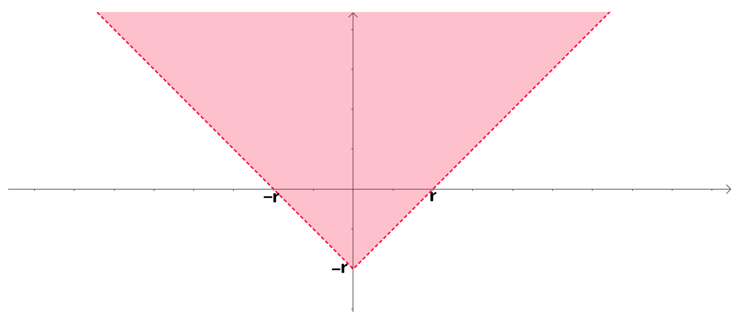
$$B((0,0),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < r\}.$$

Note que

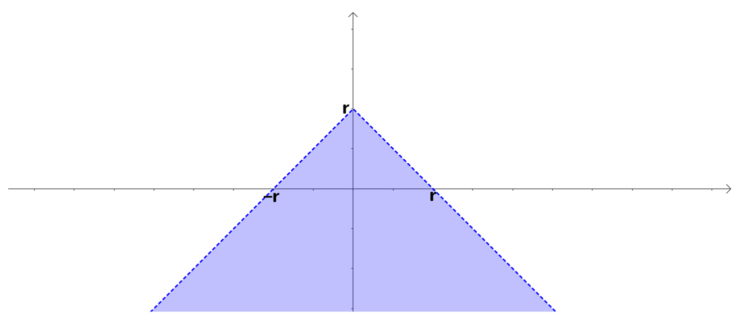
$$|x| + |y| < r \Leftrightarrow |y| < r - |x| \Leftrightarrow |x| - r < y < r - |x|.$$

Veja que $y = |x| - r$ e $y = -|x| + r$ são funções modulares, respectivamente, deslocadas r unidades para baixo e para cima que limitam os pontos que queremos encontrar. Graficamente,

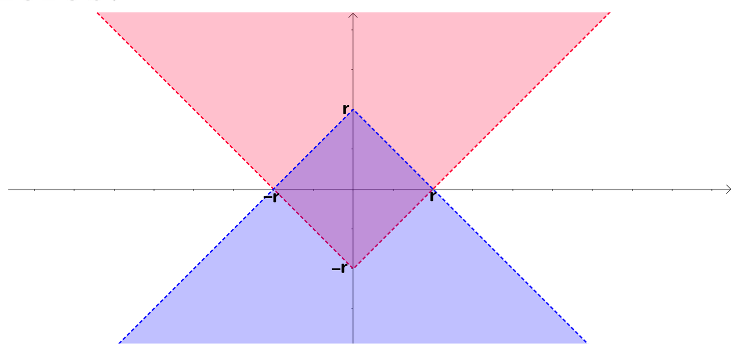
$y > |x| - r$



e $y < -|x| + r$



Portanto, a região $|x| + |y| < r$ é formada pela intercessão das regiões anteriores:



• Em $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$,

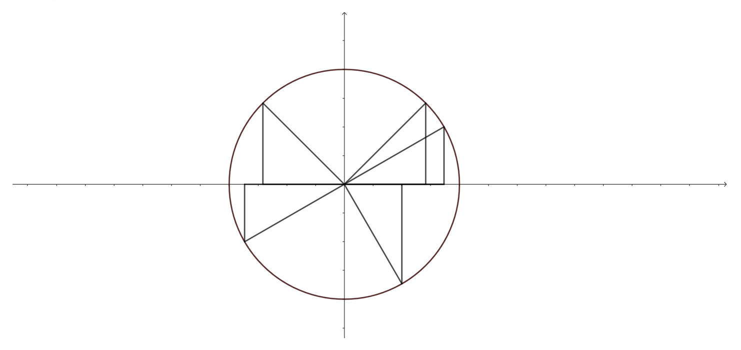
$$B((0,0),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} < r\}.$$

Note que:

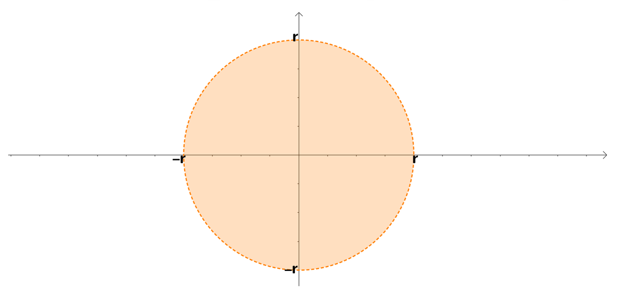
$$\sqrt{x^2+y^2} < r \Leftrightarrow x^2 + y^2 < r^2.$$

Veja que $x^2 + y^2 = r^2$ é a equação da cincurferência de raio r. Logo, os pontos que queremos encontrar estão limitados por essa circunferência. Perceba que a equação da cincurferência assume esse formato pois $x^2 + y^2$ refletem todos os pontos nos quais a hipotenusa do triângulo retângulo de lados x e y é igual a r e os extremos onde $x = 0$ e $y = 0$.

Segue a representação de alguns triângulos:



Portanto, a bola aberta neste caso é compreendida pela seguinte região:



• Em $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)$,

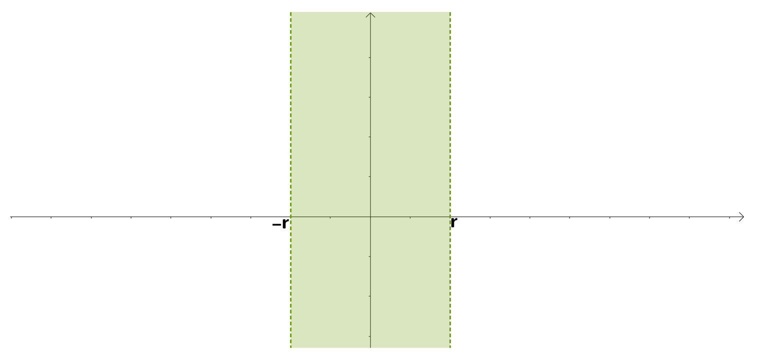
$$B((0,0),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|,|y|\} < r\}.$$

Note que:

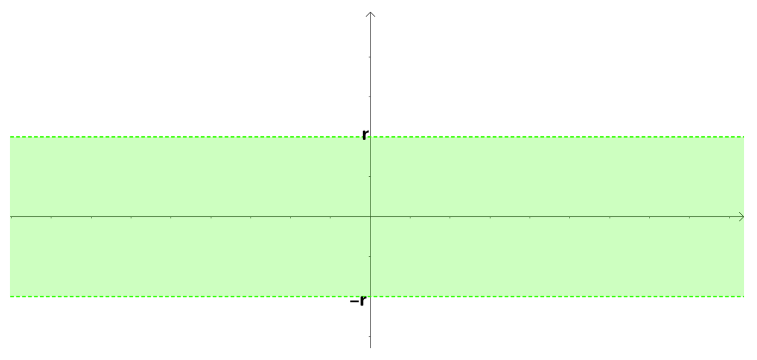
$$\max\{|x|,|y|\} < r \Leftrightarrow |x| < r \text{ e } |y| < r \Leftrightarrow -r < x < r \text{ e } -r < y < -r.$$

Veja que $x = -r$, $x = r$, $y = r$ e $y = -r$ são retas cujo valor de x ou de y são constantes. Logo, os pontos que queremos encontrar estão entre essas retas. Graficamente,

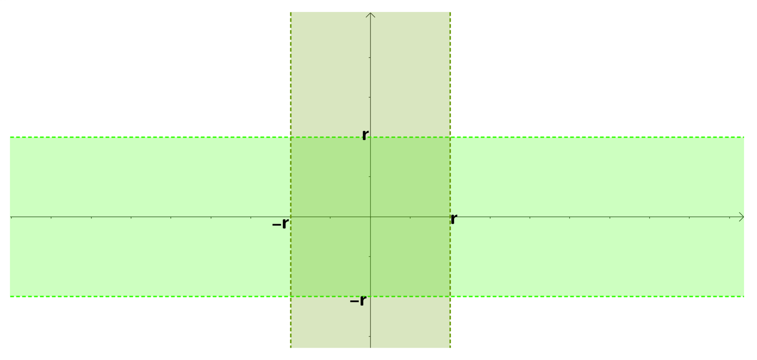
$|x| < r$



e $|y| < r$

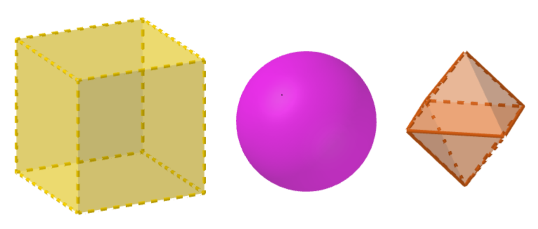


Portanto, a região $\max\{|x|,|y|\} < r$ é formada pela intercessão das regiões anteriores:



Conclusão

Após análise das definições de norma e bola aberta pode-se contastar as diversas representações de norma que podem haver em um mesmo espaço vetorial de maneira equivalente. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ também podemos representar as bolas abertas com raio r, as normas do máximo, euclidiana e da soma têm, respectivamente, as bolas abertas com a seguinte configuração:



Referências

[LIMA, E. L.] "Análise no espaço $\mathbb{R}^n$". - *Brasília, Ed Universidade de Brasília; São Paulo, Ed. Blucher Ltd 1970.*

[KREYSZIG, E.] Introductory Functional Analysis with Applications. - *New York:Wiley, 1989.*

[OLIVEIRA, C. R.] Introdução à Análise Funcional. - *2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.*

Agradecimentos

O autor é bolsista de Iniciação Científica suportado pela Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro(FAPERJ).