Índice de Maslov e Cálculo das Variações

João G. Chiorato & Diego M. Otero

Universidade Federal do Paraná

joao.chiorato@ufpr.br, otero@ufpr.br

Resumo

Estudamos o **Índice de Maslov**, no contexto de espaços vetoriais simpléticos de dimensão finita, como um invariante homotópico de *loops* de matrizes simpléticas. Podemos interpretar este Índice como o número de intersecções com um ciclo de Maslov de matrizes simpléticas.

Este Índice pode ser naturalmente aplicado no estudo de sistemas Hamiltonianos, uma vez que estes sistemas possuem uma estrutura simplética natural. Desse modo, em problemas regulares de Cálculo das Variações de curvas, podemos associar este Índice a pontos críticos de funcionais.

Conceitos iniciais

Definição 1. *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e ω uma forma antissimétrica, bilinear e não-degenerada em V. Um espaço vetorial simplético é o par (V, ω).*

Definição 2. *Um simplectomorfismo entre os espaços vetoriais simpléticos (V_1, ω_1) e (V_2, ω_2) é um isomorfismo simplético $\varphi : V_1 \to V_2$ tal que $\omega_2(\varphi(u), \varphi(v)) = \omega_1(u, v)$, $\forall u, v \in V_1$.*

Definição 3. *Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ é dita simplética se satisfazer $A^T J_0 A = J_0$, onde $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}$.*

Observação 1. *O conjunto das matrizes simpléticas em $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ é um grupo e é denotado por $Sp(n)$*

Lema 1. *Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, onde $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, com $i = 1, 2, 3, 4$. Temos que $A \in Sp(n) \Leftrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} A_4^T & -A_2^T \\ -A_3^T & A_1^T \end{pmatrix}$.*

Equivalentemente, $A \in Sp(n)$ se $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, definida por $\varphi(\vec{v}) = A\vec{v}$, for um simplectomorfismo de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Lema 2. $Sp(n) \cap O(2n) = Sp(n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = O(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = U(n)$.

Lema 3. *(Decomposição Polar) Seja $A \in Sp(n)$. Então, A pode ser decomposta por $A = UP$, donde $U = A(AA^T)^{-\frac{1}{2}} \in U(n)$ e $P = (AA^T)^{\frac{1}{2}} \in Sp(n)$.*

O Índice de Maslov

Teorema 1. *Existe uma única função μ que associa um loop $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to Sp(n)$ a um inteiro $\mu(\psi)$, chamada de Índice de Maslov, que satisfaz os seguintes axiomas:*

1. *(Homotopia) Dois loops ψ_1 e ψ_2 são homotópicos se, e somente se, $\mu(\psi_1) = \mu(\psi_2)$;*
2. *(Produto) Se ψ_1 e ψ_2 são loops em $Sp(n)$, então $\mu(\psi_1\psi_2) = \mu(\psi_1) + \mu(\psi_2)$;*
3. *(Soma direta) . Sejam ψ_1 e ψ_2 loops em $Sp(n_1)$ e $Sp(n_2)$, respectivamente. Então, $\mu(\psi_1 \oplus \psi_2) = \mu(\psi_1) + \mu(\psi_2)$;*
4. *(Normalização) Considere o loop $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to Sp(1)$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$. Então, $\mu(\psi) = 1$.*

Ideia: Dado $A \in Sp(n)$, considere a decomposição polar $A = PQ$. Então, $Q = X + iY \approx \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$, e definimos $\rho : Sp(n) \to S^1$ por $\rho(A) = \det(X + iY) \in S^1$.

Considere agora um *loop* $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to Sp(n)$. Assim, obtêm-se um loop $\rho \circ \psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$, onde define-se $\mu(\psi) = grau(\rho \circ \psi)$. Equivalentemente, temos $(\rho \circ \psi)(t) = e^{2\pi i a(t)}$ para alguma função contínua $a : [0, 1] \to \mathbb{R}$ e $\mu(\psi) = a(1) - a(0)$.

O Índice μ dessa forma definido satisfaz todos os axiomas.

Aplicação em Cálculo das Variações

Sendo $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos o funcional $\mathcal{F}(c) = \int_a^b L(c(t), c'(t))dt$, onde $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é uma curva de classe C^∞ tal que $c(a) = p_0$ e $c(b) = p_1$ estão fixos. A função L é chamada de **Lagrangeana** associada a $\mathcal{F}$.

Teorema 2. *(Equação de Euler-Lagrange) Se c é ponto crítico de $\mathcal{F}$, então*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}(c(t), c'(t))\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}}(c(t), c'(t)) = 0. \qquad (1)$$

Para classificar pontos críticos, estudamos a 2ª variação de $\mathcal{F}$, dada por

$$\delta^2\mathcal{F}(c)(h) = \int_a^b (h'^T P h' + h^T Q h)dt; P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Definição 4. *Um ponto $t_0 \in (a, b]$ é dito* ***ponto conjugado*** *se existir h não trivial que seja solução da Equação abaixo, tal que $h(a) = 0 = h(t_0)$:*

$$\frac{d}{dt}(P.h') - Qh = 0. \qquad (2)$$

A Equação 2 é chamada de Equação de Jacobi.

Aplicando a **transformação de Legendre** na Equação 2, onde $y = P(t)h'(t)$, temos um sistema Hamiltoniano

$$X' = \begin{pmatrix} h' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & P(t)^{-1} \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ y \end{pmatrix},$$

onde $\begin{pmatrix} 0 & P(t)^{-1} \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix}$ pertence à álgebra de Lie de $Sp(n)$.

Definição 5. *Seja $t \mapsto \Psi(t) = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & D(t) \end{pmatrix} \in Sp(n)$. Um instante $t_0 \in [a, b]$ é regular se a forma de cruzamento $\Gamma_{t_0} : \ker B(t_0) \to \mathbb{R}$ dada por $\Gamma_{t_0} = -\langle B'(t_0)y, D(t_0)y\rangle$ é não singular.*

Proposição 1. *Seja uma matriz fundamental do sistema acima, com $\Psi(0) = Id$. Temos então que $\Psi(t) \in Sp(n)$.*

Ainda mais, t_0 é conjungado se, e somente se, $\ker B(t_0) \neq 0$

Teorema 3. *Se $\Psi(t)$ tem um número finito de instantes regulares, vale*

$$\mu(\Psi) = \frac{1}{2}\sum_{t\in[a,b]} sign\Gamma_t$$

Conclusão

No problema do Cálculo das Variações de curvas acima, o Índice de Maslov está relacionado com a existência de pontos conjugados e pode ser usado para a classificação dos índices de pontos críticos de funcionais.

Referências

[1] Ana Cannas Da Silva. *Lectures on symplectic geometry*, volume 2. Springer, 2008.

[2] Izrail Moiseevitch Gelfand, Richard A Silverman, et al. *Calculus of variations*. Courier Corporation, 2000.

[3] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *Introduction to symplectic topology*, volume 27. Oxford University Press, 2017.

[4] Joel Robbin and Dietmar Salamon. The maslov index for paths. *Topology*, 32(4):827–844, 1993.