O Teorema da Aplicação Aberta

Jennyfer Souza & Gelson dos Santos (Orientador)

Universidade Federal do Pará / Faculdade de Matemática

desouzaneves04@gmail.com

Resumo

Este trabalho apresenta o *Teorema da Aplicação Aberta*, que foi publicado pelo matemático Stefan Banach em 1932 no livro *"Théorie des opérations linéaires"*, considerado como o marco da fundação da Análise Funcional como disciplina matemática, e teve sua primeira demonstração realizada pelo matemático Juliusz Schauder em 1930. Este resultado garante que se E e F são espaços de Banach, então todo operador linear contínuo e sobrejetor $T : E \longrightarrow F$ é uma aplicação aberta, isto é, $T(A)$ é aberto em F sempre que A for aberto em E.

Introdução

Este trabalho é fruto das atividades de uma iniciação científica, onde ao longo de um ano foram estudados tópicos de Análise Funcional. Sendo assim, resultados importantes como o *Teorema de Hanh-Banach* (em suas formas analítica e geométricas), o *Princípio da Limitação Uniforme*, o *Teorema da Aplicação Aberta* e o *Teorema do Gráfico Fechado* foram centrais para o desenvolvimento e amadurecimento do pensamento matemático e conteúdo relacionado a esta disciplina.

Resultado

Para que seja possível demonstrar o *Teorema da Aplicação Aberta* é necessário enunciar o *Teorema da Categoria de Baire*.

Teorema 1 (Teorema da Categoria de Baire). *Seja $X \neq \varnothing$ um espaço métrico completo e $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de subconjuntos fechados de X tais que*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X.$$

Então existe um $n_0 \geq 1$ tal que $Int(X_{n_0}) \neq \varnothing$.

Agora, já estamos aptos para apresentar o *Teorema da Aplicação Aberta*.

Teorema 2 (Teorema da Aplicação Aberta). *Sejam E e F dois espaços de Banach e seja $T : E \to F$ um operador linear, contínuo e sobrejetor. Então existe uma contante $c > 0$ tal que*

$$T(B_E(0,1)) \supset B_F(0,c)\,. \tag{1}$$

Demonstração. *Suponha que $T : E \to F$ é uma aplicação linear e sobrejetora. Então existe $c > 0$ tal que*

$$\overline{T(B(0,1))} \supset B(0,2c). \tag{2}$$

De fato, seja $X_n = n\overline{T(B(0,1))}$. Como T é sobrejetora temos X_n fechado e $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, logo, pelo Teorema da Categoria de Baire (pois F é espaço de Banach) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int\, X_{n_0} \neq \varnothing$, ou seja,

$$int\,\overline{T(B(0,1))} \neq \varnothing.$$

Sejam $c > 0$ e $y_0 \in F$ tais que

$$B(y_0, 4c) \subset \overline{T(B(0,1))}. \tag{3}$$

Em particular, $y_0 \in \overline{T(B(0,1))}$, e por simetria,

$$-y_0 \in \overline{T(B(0,1))}. \tag{4}$$

Assim, por (3) e (4) obtemos

$$\begin{aligned} B(0,4c) = -y_0 + B(y_0,4c) &\subset \overline{T(B(0,1))} + \overline{T(B(0,1))} \\ &= 2\overline{T(B(0,1))}, \end{aligned}$$

a última igualdade é verdadeira porque T é linear e $B(0,1)$ é convexo, logo $\overline{T(B(0,1))}$ é convexo. Como $B(0,4c) \subset 2\overline{T(B(0,1))}$, segue o resultado em (2).

Afirmamos que dada $T : E \to F$ uma aplicação linear e contínua, se existe $c > 0$ tal que

$$\overline{T(B(0,1))} \supset B(0,2c)$$

então

$$T(B(0,1)) \supset B(0,c). \tag{5}$$

De fato, seja $y \in B(0,c) \subset F$, queremos encontrar $x \in B(0,1) \subset E$ tal que $Tx = y$. Por (2) sabemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $z \in B\left(0,\frac{1}{2}\right) \subset E$ tal que $Tz \in B(y,\varepsilon)$. Com efeito, como $2y \in B(0,2c)$, existe $z' \in B(0,1)$ tal que $\|Tz' - 2y\| < \varepsilon$; daí, $\|T\frac{z'}{2} - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e podemos tomar $z = \frac{z'}{2}$. Escolhendo $\varepsilon = \frac{c}{2}$ obtemos $z_1 \in E$ tal que

$$\|z_1\| < \frac{1}{2} \quad e \quad \|y - Tz_1\| < \frac{c}{2}.$$

Aplicando o mesmo argumento a $y - Tz_1$ e escolhendo $\varepsilon = \frac{c}{4}$, encontramos $z_2 \in E$ tal que

$$\|z_2\| < \frac{1}{4} \quad e \quad \|(y - Tz_1) - Tz_2\| < \frac{c}{4}.$$

Procedendo desta forma, obtemos uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\|z_n\| < \frac{1}{2^n} \quad e \quad \|y - T(z_1 + \ldots + z_n)\| < \frac{c}{2^n}, \tag{6}$$

para todo n. Consideremos, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$x_n = z_1 + \ldots + z_n.$$

Desde que $z_k \in B_k$, temos $\|z_k\| < \frac{1}{2^k}$. Daí, obtemos que se $n > m$ então

$$\|x_n - x_m\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|z_k\| < \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \longrightarrow 0$$

quando $m \longrightarrow \infty$, logo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Como E é de Banach, podemos tomar $x = \lim x_n$ e, sendo T contínuo, temos $T(x_n) \longrightarrow T(x)$ em F. Assim,

$$\|y - T(x)\| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|y - T(z_1 + \ldots + z_n)\|$$

e por (6) segue-se que

$$\|y - T(x)\| \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{c}{2^n} = 0,$$

ou seja, $y = Tx$. Além disso,

$$\|x\| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|z_k\| < \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

o que prova (5). Portanto, utilizando (2) e (5) a demonstração do teorema está completa. .

Observação 1. *A relação (1) prova que T é uma aplicação aberta. De fato, seja $U \subset E$ um aberto, veremos que $T(U)$ é aberto. Fixemos um ponto qualquer $y_0 \in T(U)$, de modo que $y_0 = Tx_0$ para algum $x_0 \in U$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_0,\varepsilon) \subset U$, isto é, $x_0 + B(0,\varepsilon) \subset U$. Então*

$$y_0 + T(B(0,\varepsilon)) \subset T(U).$$

Pela relação (1) no Teorema 2 obtemos

$$T(B(0,\varepsilon)) \supset B(0,\varepsilon c),$$

logo, $B(y_0,\varepsilon\, c) \subset T(U)$.

Referências

[1] Rodney Josué Biezuner. Notas de aula análise funcional. *Instituto de Ciências Exatas-UFMG*, 2009.

[2] Garrett Birkhoff and Erwin Kreyszig. *The establishment of functional analysis*, volume 11. Elsevier, 1984.

[3] Geraldo Botelho, Daniel Pellegrino, and Eduardo Teixeira. *Fundamentos de análise funcional*. SBM, 2012.

[4] Haim Brezis and Haim Brézis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, volume 2. Springer, 2011.