# Problemas elípticos com o p-Laplaciano fracionário envolvendo não linearidades trocando de sinal via quociente de Rayleigh


## Jefferson L. A. Oliveira, Edcarlos D. Silva & Claudiney Goulart

Universidade Federal de Goiás & Universidade Federal de Jataí

jefferson_luis@discente.ufg.br edcarlos@ufg.br & claudiney@ufj.edu.br


impa
Instituto de Matemática Pura e Aplicada


### Resumo

Nós consideramos o seguinte problema elíptico não local com não linearidade trocando de sinal:

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u + V(x)\,|u|^{p-2}u = \lambda f(x)\,|u|^{q-2}u + g(x)\,|u|^{r-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $\lambda \in (0,\lambda^*)$, $\lambda^* > 0$ e $N > ps$ com $s \in (0,1)$. Além disso, nós assumimos que $1 < q < p < r < p_s^* = Np/(N-ps)$. O objetivo principal deste trabalho é considerar $f$ e $g$ funções que podem trocar de sinal, e determinar a existência de duas soluções fracas não triviais para cada $\lambda \in (0,\lambda^*)$. O número $\lambda^* > 0$ é ótimo no sentido de que podemos aplicar diretamente o método de Nehari.


### Introdução

Neste trabalho, estabelecemos a existência de soluções para o seguinte problema:

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u + V(x)\,|u|^{p-2}u = \lambda f(x)\,|u|^{q-2}u + g(x)\,|u|^{r-2}u, \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{1}$$

onde $\lambda \in (0,\lambda^*), \lambda^* > 0$, $N > ps$ com $s \in (0,1)$ fixado, $1 < q < p < r < p_s^*$ e $p_s^* = Np/(N-ps)$. Aqui nós consideramos o caso em que as funções $f$ e $g$ podem trocar de sinal. Utilizando o conhecido método de Nehari em conjunto com o quociente de Rayleigh não linear nós provamos um resultado de existência e multiplicidade de soluções para o Problema (1). Ao longo deste trabalho assumimos que:

- $(F)$ A função $f \in L^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^N)$, com $\tilde{q} = \frac{r}{r-q}$;
- $(G)$ A função $g \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$;
- $(A_1)$ Existe um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tal que $f$ e $g$ são positivas, para todo $x \in \Omega$;
- $(V_1)$ $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e existe uma constante $V_0 > 0$ tal que $V_0 = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^N} V(x)$;
- $(V_2)$ Para cada $M > 0$, temos $\mu\{x \in \mathbb{R}^N \backslash V(x) \le M\} < \infty$.

O espaço de trabalho é definido por $X = \{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p dx < \infty\}$. O espaço $X$ munido da norma $\|u\|^p = [u]^p + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p dx$ é um espaço de Banach reflexivo, onde $[\cdot]$ é a conhecida seminorma de Gagliardo. Ao Problema (1), nós associamos o seguinte funcional $J : X \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\lambda}{q}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)|u|^q dx - \frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^r dx.$$

Relembramos que uma função $u \in X$ é um ponto crítico para o funcional energia $J$ se e somente se $J'(u)\varphi = 0$ para cada $\varphi \in X$.

### Resultados Preliminares

Note que o funcional $J$ não é limitado inferiormente em $X$. Neste caso, nós definimos a conhecida variedade de Nehari dada por $\mathcal{N} := \{u \in X \backslash \{0\} : J'(u)u = 0\}$.

Não é difícil notar que a variedade de Nehari $\mathcal{N}$ pode ser dividida em três novos conjuntos como se segue:

$$\mathcal{N}^+ = \{u \in \mathcal{N} : J''(u)(u,u) > 0\},$$
$$\mathcal{N}^- = \{u \in \mathcal{N} : J''(u)(u,u) < 0\},$$
$$\mathcal{N}^0 = \{u \in \mathcal{N} : J''(u)(u,u) = 0\}.$$

Uma vez que desejamos aplicar o método do quociente de Rayleigh [1, 2, 3], nós introduzimos o importante conjunto

$$A = \left\{u \in X\backslash\{0\} : \int_{\mathbb{R}^N} f(x)|u|^q dx > 0, \int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^r dx > 0.\right\}$$

Deste modo, definimos os funcionais auxiliares $R_n, R_e : A \to \mathbb{R}$ associados com o parâmetro $\lambda$ como se segue:

$$R_n(u) = \frac{\|u\|^p - \int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^r dx}{\int_{\mathbb{R}^N} f(x)|u|^q dx}, \; R_e(u) = \frac{\frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^r dx}{\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)|u|^q dx}.$$

Sejam $\Lambda_n(u) := \sup\limits_{t>0} R_n(tu)$, e $\Lambda_e(u) = \sup\limits_{t>0} R_e(tu)$. Definimos os seguintes parâmetros:

$$\lambda^* = \inf_{u \in A} \Lambda_n(u), \; \lambda_* = \inf_{u \in A} \Lambda_e(u).$$

**Proposição 1.** *Suponha que $(F)$, $(G)$, $(A_1)$, $(V_1)$ e $(V_2)$ sejam satisfeitas. Então $\lambda^* > 0$ e $\lambda_* > 0$. Além disso, existem funções $u, v \in A$ tais que $\lambda_*$ e $\lambda^*$ são atingidos.*

**Proposição 2.** *Assuma que $(F)$, $(G)$, $(A_1)$, $(V_1)$ e $(V_2)$ sejam verificadas. Então, para cada $u \in A$ e $\lambda < \Lambda_n(u)$, a fibra $J(tu)$ possui exatamente dois pontos críticos, $0 < t^{n,+}(u) < t_n(u) < t^{n,-}(u)$, tais que $t^{n,+}(u)u \in \mathcal{N}^+ \cap A$ e $t^{n,-}(u)u \in \mathcal{N}^- \cap A$.*

Definindo $Q_n(t) = R_n(tu), Q_e(t) = R_e(tu), t > 0$, nós temos a seguinte representação:

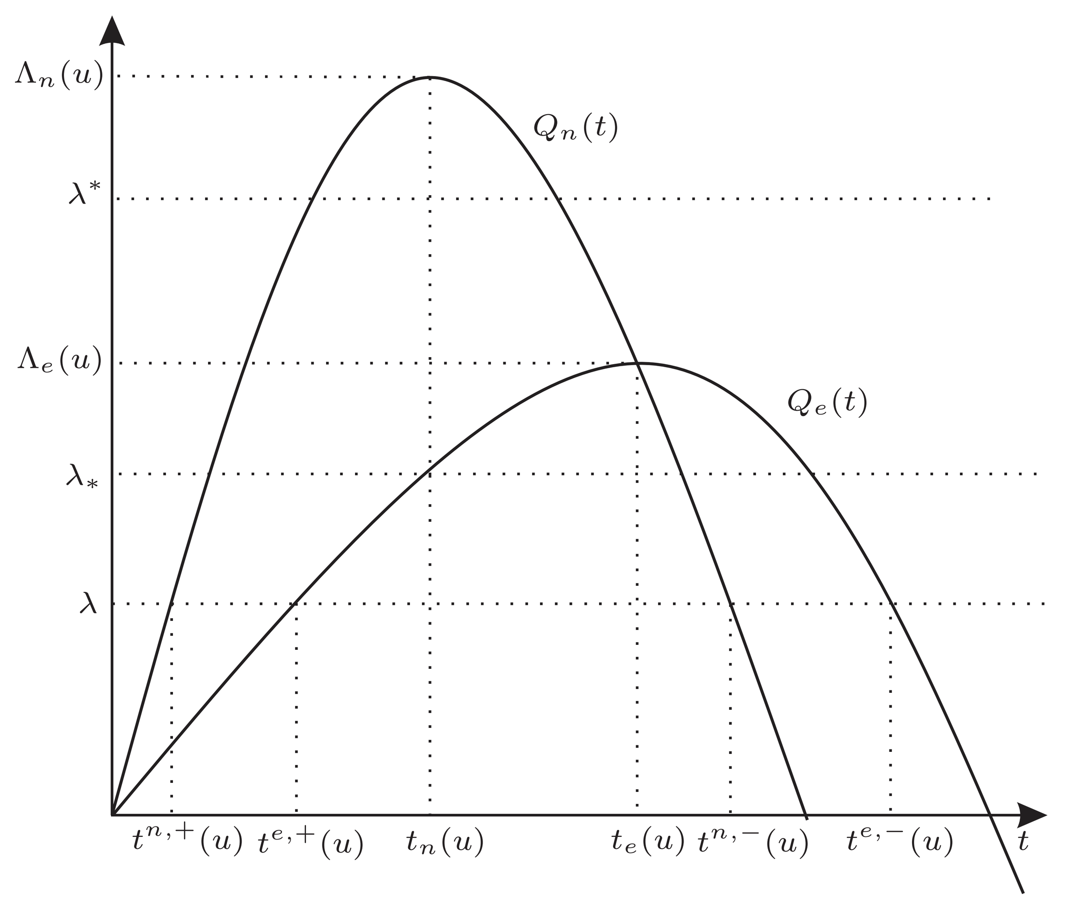


**Figura 1:** Possível representação de $Q_n$ e $Q_e$.

### Resultados

**Teorema 1.** *Suponha $(F)$, $(G)$, $(V_1)$, $(V_2)$ e $(A_1)$. Então $0 < \lambda_* < \lambda^* < \infty$. Além disso, assuma que*

$$\inf_{w \in \mathcal{N}^- \cap A} J(w) < \inf_{w \in \mathcal{N}^- \cap \partial A} J(w) \text{ quando } \mathcal{N}^- \cap \partial A \neq \emptyset.$$

*Então para cada $\lambda \in (0,\lambda^*)$ o Problema (1) possui pelo menos uma solução $v \in \mathcal{N}^- \cap A$.*

**Teorema 2.** *Assuma $(F)$, $(G)$, $(V_1)$, $(V_2)$ e $(A_1)$. Então $0 < \lambda_* < \lambda^* < \infty$. Suponha ainda que*

$$\inf_{w \in \mathcal{N}^+ \cap A} J(w) < \inf_{w \in \mathcal{N}^+ \cap \partial A} J(w) \text{ desde que } \mathcal{N}^+ \cap \partial A \neq \emptyset.$$

*Então para cada $\lambda \in (0,\lambda^*)$ o Problema (1) possui pelo menos uma solução $u \in \mathcal{N}^+ \cap A$. Além disso nós obtemos que $J(u) < 0$.*

### Referências


[1] M. L. M. Carvalho, E. D. Silva and C. Goulart, *Choquard equations via nonlinear rayleigh quotient for concave-convex nonlinearities*, Communications on Pure and Applied Analysis 20, (2021), p. 3445-3479.

[2] Y. Il'yasov, *On extreme values of Nehari manifold method via nonlinear Rayleigh's quotient*, Topological Methods in Nonlinear Analysis 49.2 (2017), p. 683-714.

[3] Y. Il'yasov and K. Silva, *On branches of positive solutions for p-Laplacian problems at the extreme value of Nehari manifold method*, Proc. Amer. Math. Soc. 146 (2018), p. 2925–2935.



### Agradecimentos

Este trabalho é suportado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás em conjunto com a Universidade Federal de Goiás.