Identidades polinomiais para as álgebras de Leibniz tridimensionais RR_1 e RR_2

Janara Ramos Nascimento & Manuela Souza

Universidade Federal da Bahia - Instituto de Matemática e Estatística

janara.ramos@ufba.br

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Neste trabalho estudamos identidades polinomiais em duas álgebras de Leibniz tridimensionais. Para RR_1 exibimos (quando existem) identidades polinomiais multilineares de grau menor ou igual a 3 e para RR_2 exibimos (quando existem) identidades polinomiais multilineares de grau menor ou igual a 4 sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Introdução

Um interesse geral pela teoria das identidades polinomiais, começou na primeira metade do século 20, ganhando intensidade no final dos anos 1940 após o trabalho de Kaplansky, que sugeriu que a existência de uma identidade polinomial para uma álgebra pode fornecer informações sobre sua estrutura. Mas foi só depois de uma década que esse estudo se intensificou, a partir do artigo de Amitsur e Levitzki, que deu notoriedade ao assunto. Seja $X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ um conjunto infinito enumerável de variáveis e $\mathcal{D}(X)$ a álgebra livre de Leibniz, livremente gerada por X. Diremos que um polinômio $f = f(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{D}(X)$ é uma identidade polinomial de uma álgebra de Leibniz se $f(a_1, ..., a_n) = 0$ para todo $a_1, ..., a_n \in L$.

As álgebras de Lie desempenham um papel importante em diferentes áreas, seu estudo e aplicações têm gerado diferentes generalizações. Uma delas foi redescoberta por Jean-Louis Loday nos anos 90: a álgebra de Leibniz. Uma álgebra L sobre um corpo $\mathbb{K}$ é chamada de álgebra de Leibniz (que são uma generalização das álgebras de Lie) se satisfaz a seguinte identidade, chamada de identidade de Leibiniz:

$$(xy)z = (xz)y + x(yz), \forall\, x, y, z \in L$$

Neste trabalho, abordamos o problema de descrever as identidades polinomiais de duas álgebras de Leibniz, chamadas de RR_1 e RR_2. Aqui, descrevemos (quando disponível) as identidades polinomiais multilineares para RR_1 e RR_2 com grau menor ou igual à 4.

Resultados

Definição 1: Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ base de L. Defina RR_1 e RR_2 álgebras de Leibniz com um produto de elementos da base, dado por

$$RR_1 : e_1e_3 = -2e_1,\ e_2e_2 = e_1,\ e_2e_3 = -e_2,\ e_3e_2 = e_2;$$
$$RR_2 : e_1e_3 = \alpha e_1, e_2e_3 = -e_2,\ e_3e_2 = e_2,\ com\ \alpha \in \mathbb{K}.$$

e todos os outros produtos serão iguais a zero.
Consideramos $\alpha \neq 0$ pois se $\alpha = 0$ nós temos uma álgebra de Lie.

Definição 2: Definimos o polinômio standard de Leibniz de grau 3 da seguinte forma:

$$S_3^L(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)}$$

Podemos generalizar e definir a standard de Leibniz de grau n:

$$S_n^L(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma ((((x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)})...)x_{\sigma(n)})$$

Proposição 1: As álgebras RR_1 e RR_2 não possuem identidades multilineares de grau 2.

Para identidades multilineares de grau 3, tomando um polinômio multilinear de grau 3 em sua forma geral, dado por:

$$g(x_1, x_2, x_3) = \eta_1(x_1x_2)x_3 + \eta_2(x_1x_3)x_2 + \eta_3(x_2x_1)x_3 + \eta_4(x_2x_3)x_1 + \eta_5(x_3x_1)x_2 + \eta_6(x_3x_2)x_1$$

com $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6 \in \mathbb{K}$, obtemos que

- RR_1 não possui identidades multilineares de grau 3
- RR_2 possui identidade multilinear de grau 3 dada por:

$$g(x_1, x_2, x_3) = \eta_1[(x_1x_2)x_3 - (x_1x_3)x_2 - (x_2x_1)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2 - (x_3x_2)x_1]$$

Sendo assim, podemos observar que o menor grau de S_3 que RR_2 satisfaz é n = 3.
Seguindo com as investigações para RR_2, temos que:

Proposição 2: A álgebra RR_2 tem a metabeliana $(x_1x_2)(x_3x_4)$ como identidade.

Definição 3: Definimos uma nova standard como

$$\sum_{\substack{\sigma \in S_2\{1,2\} \\ \tau \in S_2\{3,4\}}} (-1)^\sigma (-1)^\tau ((x_{\sigma(1)}x_{\tau(3)})x_{\sigma(2)})x_{\tau(4)}$$

Proposição 3: A nova standard é uma identidade polinomial para a álgebra RR_2.

Desse modo, concluímos que

(i)

$$\langle S \rangle^T \cap P_3 = P_3 \cap \{\alpha \cdot S_3; \alpha \in \mathbb{K}\}$$

com

$$S = S_3^L(x_1, x_2, x_3)$$

(ii)

$$\langle S \rangle^T \cap P_4 = P_4 \cap Id(RR_2)$$

com

$$S = \{S_3^L, (x_1x_2)(x_3x_4), \sum_{\substack{\sigma \in S_2\{1,2\} \\ \tau \in S_2\{3,4\}}} (-1)^\sigma (-1)^\tau ((x_{\sigma(1)}x_{\tau(3)})x_{\sigma(2)})x_{\tau(4)}\}$$

Vale ressaltar que esses resultados são inéditos na literatura, levando-nos ao objetivo de mostrar que as identidades encontradas aqui, formam uma base do T-ideal.

Conclusões

- As álgebras RR_1 e RR_2 não possuem identidades multilineares de grau 2
- A álgebra RR_1 não possui identidade multilinear de grau 3
- A álgebra RR_2 possui identidade multilinear de grau 3, uma identidade múltipla da standard de Leibniz e identidades multilineares de grau 4.

Referências

[1] V. DRENSKY. *Free algebras and PI-algebras*. Springer-Verlarg, Singapore, 2000.

[2] A. GIAMBRUNO and M. ZAICEV. *Polinomial identities and asymptotic methods*. American Mathematical Society, USA, 2005.

[3] A. F. MELO JUNIOR. Identidades polinomiais para as álgebras de Leibniz de dimensão menor ou igual a 3. Dissertação de mestrado, Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, 2017.

[4] I. RIKHSIBOEV and I. RAKHIMOV. Classification on three dimensional complex Leibniz algebras. *AIP Conference Proceedings*, 2012.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.