Conservação de Energia em Sistemas Dinâmicos

Henrique Casellato V. R. C.[1] **& Tiago de Carvalho**[2]

Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo (FFCLRP-USP)

hcasellato@usp.br[1] tiagocarvalho@usp.br[2]

Universidade de São Paulo

Resumo

Uma partícula de massa m com trajetória $x(t)$ que satisfaça a Lei de Newton, $mx''(t) = f(x(t))$, sob ação de um campo de forças $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $f(x, x', t)$ com Energia Cinética $E_c(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}$ e Energia Potencial $E_p(x, \dot{x}) = U(x) = -\int_{x_0}^{x_1} f(y)dy$, tem Energia Total $E_t(x, \dot{x})$,

$$E_t(x, \dot{x}) = E_c(x, \dot{x}) + E_p(x, \dot{x}).$$

Caso o campo de forças $f(x)$ seja conservativo, a Energia Total é *constante* ao longo de $x(t)$, sendo esse o Teorema da Conservação de Energia.

Introdução

(Ver referência [1]) Suponha que $x(t) \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$, para cada $t \in \mathrm{R}$, descreve a posição de uma partícula de massa m sob a ação de um campo de forças $f : \mathrm{R}^{2\mathrm{n}+1} \to \mathrm{R}^{2\mathrm{n}}$, $f(x, x', t)$, $x \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$, $x' \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$, $t \in \mathrm{R}$. A segunda Lei de Newton afirma que a trajetória $x(t)$ do sistema mecânico satisfaz a equação diferencial de segunda ordem

$$mx''(t) = f(x(t), x'(t), t).$$

Se $f(x, x', t)$ é um campo de forças, segue a tradição que $\dot{x}$ indica a variável independente da equação de primeira ordem associada a $mx'' = f(x, x', t)$, ou seja, escreve-se

$$F(x, \dot{x}, t) = \left(\dot{x}, \frac{1}{m}f(x, \dot{x}, t)\right).$$

1 Energia em um sistema mecânico

Para introduzir o conceito de energia em um sistema mecânico, considere uma partícula sob ação de um campo de forças $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $f(x, x', t)$ com trajetória $x(t)$. A *energia cinética* da trajetória $x(t)$ no tempo t é

$$E_c(x'(t)) = \frac{1}{2}mx'(t)^2,$$

a *energia potencial* da trajetória $x(t)$ no tempo t é

$$U(x(t)) = -\int_{x_0}^{x(t)} f(y)\Delta y,$$

e a *energia total* da trajetória $x(t)$ no tempo t é a soma de suas energias cinética e potencial, ou seja,

$$E(x, x'(t)) = \frac{1}{2}mx'(t)^2 + U(x(t)).$$

Portanto, com $E_c, E_p : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ dadas como $E_c(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}$ e $E_p(x, \dot{x}) = U(x)$ resultam em $E_t(x, \dot{x}) = E_c(x, \dot{x}) + E_p(x, \dot{x})$.

Um campo de forças $f(x)$ definido em R é dito *conservativo* se existe uma função $U(x)$, denominada como potencial de f, tal que

$$U'(x) = -f(x).$$

Teorema da Conservação da Energia Total: Considere um campo de forças $f(x)$ conservativo e com potencial $U = E_p$. Se $x(t)$ satisfaz a Lei de Newton, $mx''(t) = f(x(t))$, então é *constante* a energia total ao longo de $x(t)$

$$E_t(x(t), x'(t)) = E_c(x'(t)) + E_p(x(t)).$$

2 Teorema do trabalho-energia

Há também como entender a Energia em um sistema mecânico pelo teorema do trabalho-energia. Para isso, (ver referência [2]) considere uma partícula sob ação de um campo de forças $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ e, por hora, que sejam constantes e sua resultante seja representada por F e que, para simplificar a notação, v seja sua velocidade. Isto produz uma aceleração $x'' = a = \frac{F}{m}$ e, para um corpo com aceleração constante, a equação de Torricelli mostra que $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$.

Agora, substitui-se a por $\frac{F}{m}$, as velocidades de v_0 e v por v_1 e v_2 e a variação de sua posição $(x - x_0) \equiv (x_2 - x_1)$ por d,

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\frac{F}{m}d \iff \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = Fd.$$

O produto Fd é o *trabalho realizado pela força* (W). Dessa forma, surge o teorema do trabalho-energia: *a mudança em energia cinética é igual ao trabalho feito por todas as forças*.

Quando a força varia em relação a x, a aceleração não é mais constante e também não é mais possível aplicar a fórmula $W = Fd$. Para solucionar esse problema, descobre-se um pequeno intervalo Δx tal que F seja essencialmente constante e então seja possível dizer que $\Delta K = F(x)\Delta x$. Dessa forma, o trabalho de x_1 a x_2 é a soma das áreas de todos esses retângulos, a área sob a curva da função $F(x)$.

$$K_2 - K_1 = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\Delta x \equiv W.$$

Para dar seguimento ao teorema, agora considere a seguinte mudança:

$$K_2 - K_1 = \int_{x_0}^{x_2} F(x)\Delta x - \int_{x_0}^{x_1} F(x)\Delta x$$

e ao substituir $\int_{x_0}^{x_1} F(x)\Delta x$ e $\int_{x_0}^{x_2} F(x)\Delta x$ por $-U_1$ e $-U_2$, tem-se a *lei da conservação de energia*:

$$E_2 \equiv K_2 + U_2 = K_1 + U_1 \equiv E_1.$$

3 Problema dos Dois Corpos

Pelo teorema da conservação da energia total, E_t é uma integral primeira da equação diferencial de primeira ordem $(x', \dot{x}') = (\dot{x}, \frac{1}{m}f(x))$ associada ao sistema mecânico $mx''(t) = f(x(t))$ e portanto cada solução $(x(t), x'(t))$ permanece dentro de exatamente uma única curva de nível constante $E(x, \dot{x})$ da função energia total.

Conservação do momento angular: Para uma partícula movendo sob ação de um campo central, o momento angular de uma curva $x(t) = (r(t), \theta(t))$, dado (em coordenadas polares) por

$$h(t) = mr^2(t)\theta'(t),$$

é constante.

O *Momento Angular* é uma outra integral primeira distinta em R^4 que permite, além da mencionada Energia Total, identificar as curvas descritas pelas trajetórias da equação diferencial $x' = F(x)$ em R^4 definida por f.

Referências

[1] Artur O. Lopes. *Introdução à mecânica clássica. Monografias de Matemática*. Number 59. IMPA, 1998.

[2] Ramamurti Shankar. *Law of Conservation of Energy*, page 70–81. Yale University Press, 2019.

Agradecimentos

Meus estudos e meu trabalho de Iniciação Científica são financiados pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP). Processo nº 2022/10534-1.

FAPESP