Introdução aos sistemas dinâmicos de tempo discreto

Gustavo Bender & Tiago de Carvalho

Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo

gustavo.bender@usp.br & tiagocarvalho@usp.br

Resumo

Neste pôster serão apresentados aspectos introdutórios a respeito de sistemas dinâmicos de tempo discreto, tais como: determinação gráfica de órbitas e sua análise qualitativa, obtenção de pontos fixos de difeomorfismos e a dinâmica da família quadrática.

Introdução

O objetivo do estudo em sistemas dinâmicos é entender o comportamento de um sistema ao longo do tempo, tendo como base alguma regra que determina a evolução do mesmo. Havendo a possibilidade de modelar as regras através de equações de diversos tipos e complexidades.

Como o intuito deste projeto é o estudo dos sistemas dinâmicos discretos, serão estudadas funções $F(x)$ com um estados inicial x_0, e como se comporta a sequência de iterações $x_0, F(x_0), F(F(x_0), F(F(F(x_0))), ..., F^n(x_0)$. E como notação, para simplificar a escrita da composição da função, com ela mesma, pela enésima vez, usa-se $F^n(x)$.

1 Determinação gráfica de Órbitas

No ramo dos sistemas dinâmicos discretos, a regra de evolução do sistema é aplicada em intervalos discretos, tendo como base o estado inicial do sistema e a função que descreve o sistema. Assim se define uma órbita de x_0 em $F(x)$ como a sequência de pontos dados por $x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F^2(x_0), ..., F^n(x_0)$. E sendo x_0 chamado como raiz da órbita.

Uma forma para entender o comportamento de uma órbita, dado uma função $F(x)$ e uma raiz x_0, é através da criação de um gráfico de órbita, que é feito com o gráfico da função $F(x)$ e da função identidade $g(x) = x$. Os pontos do gráfico de $F(x)$ que interceptam o gráfico $g(x)$, são conhecidos como pontos fixos, ou seja, pontos que, após aplicação da função levam, a si mesmos.

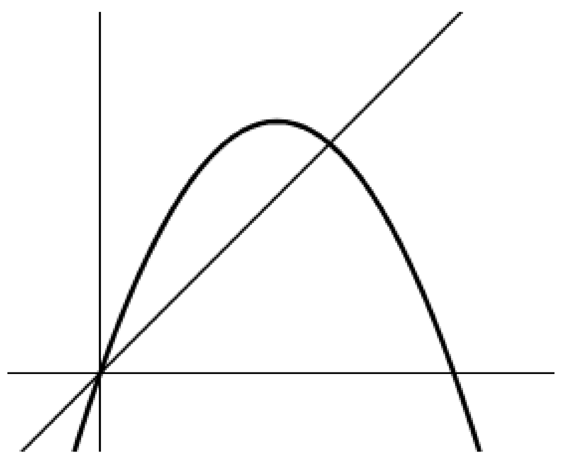

Figura 1: Gráfico do Ponto fixo

Já quando o ponto não é fixo, para entender a forma como evolui este sistema, através do método gráfico, é graficando, inicialmente o ponto $(x_0, F(x_0))$, após isso estende se uma linha paralela ao eixo x e que passa pelo ponto $(x_0, F(x_0))$ e encontra o ponto que intercepta o gráfico da função identidade, e por fim estendendo uma linha paralela ao eixo y e que passa pelo ponto $(F(x_0), F(x_0))$ e vendo o ponto que intercepta o gráfico de $F(x_0)$, encontrando $F^2(x_0)$, podendo ser feito tal processo um número n de vezes, com o fim de entender qual é o comportamento dessa órbita.

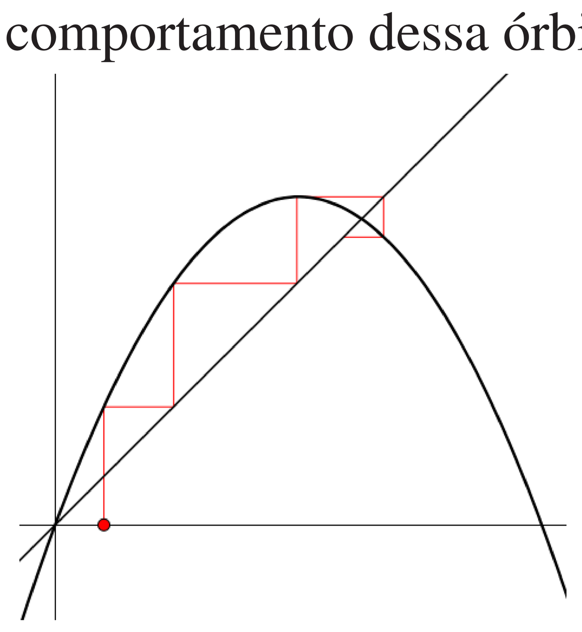

Figura 2: Gráfico Órbita Convergente

Essa ferramenta nos ajuda a observar se alguma semente x_0 escolhida, levada em conta a função $F(x)$, vai se afastar x_0, tendendo á algum valor específico, ou simplesmente divergindo para $-\infty$ ou $+\infty$.

2 Obtenção de pontos fixos

A obtenção de pontos fixos de difeomorfismos é uma parte importante do processo de estudo de um sistema dinâmico discreto, pois os pontos fixos possuem características que podem descrever o comportamento das órbitas em torno deste, dentro de um certo limite que depende do problema. Para encontrar pontos fixos deve ser resolver a simples equação:

$$F(x) - x = 0 \tag{1}$$

Mas pode se definir que dentro de um intervalo há um ponto fixo, desde que o teorema do ponto fixo seja satisfeito. Sendo o teorema do ponto fixo:

Suponha que $F : [a, b] \to [a, b]$ seja contínua. Então haverá um ponto fixo em $[a, b]$. Isso se deve pois, através do teorema do valor intermediário que diz que $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ e y_0 está entre $F(a)$ e $F(b)$ então há um x_0 pertencente ao intervalo $[a, b]$ tal que $F(x_0) = y_0$.

Então ao definirmos $H(x) = F(x) - x$, sendo essa uma função contínua:

$$H(a) - a \geq 0 \tag{2}$$

$$H(b) - b \leq 0 \tag{3}$$

Então aplicando o teorema do valor intermediário onde $\forall y \in (H(b), H(a)), \exists x \in (a, b)$ tal que $H(x) = y$. Portanto existe um $x_0 \in [a, b]$ que $H(x_0) = 0$. Então sendo x_0 um ponto fixo.

3 Dinâmica da família quadrática

Seja a família das funções quadráticas de um parâmetro c da forma:

$$Q_c(x) = x^2 + c \tag{4}$$

Os pontos fixos p satisfazem a equação:

$$Q_c(p) - p = 0 \tag{5}$$

$$p^2 - p + c = 0 \tag{6}$$

Encontrando as raízes:

$$p_+ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c}) \tag{7}$$

$$p_- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4c}) \tag{8}$$

Por isso, apenas existem pontos fixos para $Q_c(x)$ quando $c \leq \frac{1}{4}$. E existindo apenas um ponto fixo quando $c = \frac{1}{4}$, sendo $p = \frac{1}{2}$.

(Ver referência [1]) Quando c é igual a $\frac{1}{4}$, a função $Q_c(x)$ tangencia a função $y = x$ em $\frac{1}{2}$, ou seja $Q'_{\frac{1}{4}}(\frac{1}{2}) = 1$, sendo assim $p = \frac{1}{4}$, um ponto neutro.

(Ver referência [1])Quando c passa de $\frac{1}{4}$, a função sofre uma bifurcação sela-nó, assim um dos pontos fixos se torna atrator, e o outro repulsor.

Referências

[1] R. L. Devaney. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems, Theory and Experiment, vol. 1.* Perseus Books Publishing, L.L.C, 1992.

Agradecimentos

Meus estudos e meu trabalho de Iniciação Científica são financiados pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP). Processo nº 2023/04037-8.