Regularidade para Equação de Duas Fases ao Longo do Conjunto Singular

Gleiciano Cosmo Santos

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

professorgleisonmat@gmail.com

Resumo

Nos últimos anos, regularidade para equações com duas fases (DF) tem sido bastante estudada. O principal objetivo deste trabalho é obter o melhor expoente de regularidade disponível para soluções de equações não homogêneas de DF ao longo do conjunto singular. A ideia para se obter o expoente é utilizar o método de análise tangencial geométrica, o qual consiste, essencialmente, em aproximar uma solução da equação p-Laplaciano homogênea por uma solução da equação de DF não homogênea e "herdar" regularidade que essas equações homogêneas possuem. Neste projeto, apresentamos resultados preliminares de pesquisa em andamento nesta linha, no qual exploramos regularidade ótima para equações de DF.

Introdução e Preliminares

Neste trabalho, apresentamos uma nova estimativa universal para a continuidade do gradiente de soluções para equações de duas fases:

$$-\text{div}\left[\left(|\nabla u|^{m-2}+a(x)|\nabla u|^{p-2}\right)\nabla u\right]=f(x), \quad (1)$$

com

$$\begin{cases} 1<m\leq p \\ 0\leq a\in C^{0,\sigma}(B_1) \quad \text{para algum} \quad \sigma\in(0,1] \\ a\in L^\infty(B_1) \\ f\in L^q, \quad \text{com} \quad n<q\leq\infty \end{cases} \quad (2)$$

em conjuntos singulares degenerados que serão denotados por

$$\mathcal{Z}(u):=\{x:\nabla u(x)=0\}.$$

Em [2] é mostrado que soluções da equação m-harmônica

$$-\Delta_m u:=-div\left(|\nabla u|^{m-2}\nabla u\right)=0, \quad m>1 \quad (3)$$

são localmente funções de classe C^{1,α_M}, para algum $\alpha_M\in(0,1)$, dependendo apenas de n,m,λ e Λ. O valor de α_M é determinado em um espaço bidimensional (veja [3]). Daqui em diante, α_M denotará o expoente Hölder maximal do gradiente de uma função m-harmônica. Agora, para exibirmos o expoente ótimo de regularidade, definimos:

$$\alpha_{\sigma,m,p,q}:=\begin{cases}\lambda_1\lambda_2\lambda_3, & \text{se} \quad n<q<\infty, \\ \sigma\cdot\lambda_1\lambda_2\,, & \text{se} \quad q=\infty.\end{cases} \quad (4)$$

onde $\lambda_1=\min\left\{1,\frac{1}{p-1}\right\}$, $\lambda_2=\min\left\{1,\frac{1}{m-1}\right\}$ e $\lambda_3=\min\left\{\sigma,1-\frac{n}{q}\right\}$. Além disso, em [1], é mostrado que soluções de (1) possuem gradiente com regularidade Hölder contínua. Nosso objetivo principal é exibir o expoente ótimo de continuidade Hölder do gradiente em termos de p,m,q e a dimensão n do espaço ao longo do conjunto singular, utilizando assim o método tangencial geométrico. Este trabalho está sendo desenvolvido em colaboração com o doutorando Rafael Costa, sob orientação do professor Diego Marcon.

Lema de Aproximação Sobre o Conjunto Singular

Lema 1 (Lema de Compacidade). *Dado $\delta>0$ existe $\epsilon>0$ dependendo somente de δ,n,m,p, tal que se*

$$|\nabla u(0)|\leq\varepsilon \quad (5)$$
$$\|f\|_{L^q}\leq\varepsilon \quad (6)$$
$$\|a\|_{L^\infty}\leq\varepsilon, \quad (7)$$

e vale (2), então para cada solução fraca u de (1) em B_1, satisfazendo $\int_{B_1}|u|^m dx\leq 1$, existe uma função h em $B_{1/2}$, solução fraca de

$$-\text{div}(|\nabla h|^{m-2}\nabla h)=0 \quad em \quad B_{1/2} \quad (8)$$
$$\nabla h(0)==0 \quad (9)$$

tal que

$$\int_{B_{1/2}}|u-h|^m dx\leq\delta^m. \quad (10)$$

Regularidade Melhorada ao Longo do Conjunto Singular

Lema 2 (Discretização). *Seja $u\in W^{1,p}(B_1)$ uma solução fraca de (1), onde as condições dadas em (2) são satisfeitas e a normalização $\int_{B_1}|u|^m dx\leq 1$. Existem constantes $\varepsilon_0\in(0,1)$, $\rho\in(0,\frac{1}{2})$, dependendo apenas de n,m,p tais que se*

$$|\nabla u(0)|\leq\varepsilon_0 \quad (11)$$
$$\|f\|_{L^q}\leq\varepsilon_0 \quad (12)$$
$$\|a\|_{L^\infty}\leq\varepsilon_0, \quad (13)$$

então, podemos encontrar uma constante real universalmente limitada $\mu\in\mathbb{R}$, ou seja, $|\mu|<C(n,p,m)$, tal que

$$\int_{B_\rho}|u(x)-\mu|^m dx\leq\rho^{m(1+\alpha)}. \quad (14)$$

Resultados

Teorema 1. *(C., Costa, Marcon, 2023 -) Seja $u\in W^{1,p}(B_1)$ uma solução fraca de (1) tal que satisfaz as condições (2). Além disso, seja x_0 um ponto arbitrário do conjunto singular*

$$\mathcal{Z}(u):=\{y\in\Omega:\nabla u(y)=0\}.$$

Então u é localmente $C^{1,\alpha}(B_1)$ em x_0, onde

$$\alpha=\min\{\alpha_m^-,\alpha_{\sigma,m,p,q}\}. \quad (15)$$

Isto é, existe uma constante $C>0$ dependendo somente de $\|u\|_{L^m(\Omega)}$, n,m,p, $\|f\|_{L^q(\Omega)}$ e α, tal que

$$\sup_{y\in B_r(x_0)}|u(y)-u(x_0)|\leq Cr^{1+\alpha}.$$

Demonstração 1. *A ideia da prova é mostrar que existe uma sequência de números reais $\mu_k\to u(0)$ tal que*

$$\int_{B_{\rho^k}}|u(x)-\mu_k|^m dx\leq\rho^{k\cdot m(1+\alpha)}, \quad (16)$$

onde $\rho>0$ é o raio suficientemente pequeno do lema 2.

Referências

[1] Maria Colombo and Giuseppe Mingione. Regularity for Double Phase Variational Problems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 215(2):443–496, February 2015.

[2] E. DiBenedetto. $c^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 7(8):827–850, 1983.

[3] Manfredi Juan J. Iwaniec, Tadeusz. Regularity of p-harmonic functions on the plane. *Revista Matemática Iberoamericana*, 5(1-2):1–19, 1989.

[4] Eduardo Teixeira. Regularity for quasilinear equations on degenerate singular sets. *Mathematische Annalen*, 358, 04 2012.

Agradecimentos

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento deste trabalho.