Equações Diferenciais Parciais e a Equação do Calor

Geovana Salviano & Sandra M. S. Lima

Universidade Federal Fluminense

geovanasalviano@id.uff.br & sandramsl@id.uff.br

Resumo

No intuito de destacar a importância do estudo das Equações Diferenciais Parciais (EDP), vamos compreender como se comporta a condução do calor em uma barra uniforme, homogênea e isolada termicamente através da Lei de Condução de Calor de Fourier.

Introdução

Uma Equação Diferencial Parcial (EDP) é definida como uma equação que contém derivadas parciais, são capazes de resolver problemas físicos que tenham duas ou mais variáveis independentes. Como por exemplo, a dinâmica de população e a propagação de doença, são problemas do dia a dia modelados por EDP's.

Objetivos

Estudar a construção da equação do calor e algumas aplicações para dar seguimento aos estudos das Séries de Fourier.

Resultados

A condução do calor em uma barra é um problema físico que podemos modelar matematicamente com uma EDP. Para construir essa equação vamos considerar certas condições:

- Seja uma barra uniforme de material condutor de calor homogêneo, tamanho L e área transversal A;
- Suponha a superfície lateral da barra isolada termicamente e as trocas de calor ocorrendo só através das extremidades;
- Tais características garantem o fluxo de calor somente na direção longitudinal - um problema unidimensional.

Como a temperatura varia com o tempo em cada ponto da barra?

A principio considere duas seções transversais da barra, localizadas em x e $x+\Delta x$ delimitando uma fatia da barra. Através destas seções, o calor entra ou sai desta fatia.

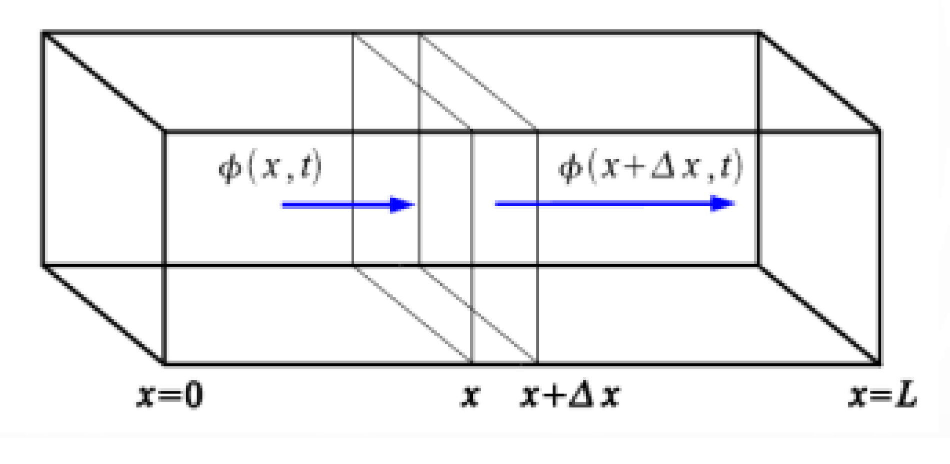

Figura 1: Barra Condutora [4]

Denotaremos por $\phi(x;t)$ o fluxo de calor. Se $\phi(x;t)<0$, o calor está fluindo para a esquerda. A quantidade total de calor (Q) que entra na fatia por unidade de tempo é dada por:

$$\phi(x,t)A-\phi(x+\Delta x,t) \tag{1}$$

O calor pode sair da da fatia na seção transversal em x se $\phi(x;t)<0$, assim como pode entrar na fatia pela seção transversal em $x+\Delta x$ se $\phi(x+\Delta x;t)<0$.

Se o resultado de (1) for negativo, então o resultado final é que o calor sai da fatia.

Lei de Condução do Calor de Fourier

Sejam P_1 e P_2 duas placas de mesmo material e mesma área A, mantidas a temperaturas constantes T_1 e T_2. Se colocadas a uma distância d, haverá passagem de calor da mais quente para a mais fria. Sendo k a condutividade térmica, essa taxa de transferência de calor é dada por:

$$\phi=kA\frac{|T_2-T_1|}{d} \tag{2}$$

Seja $u(x,t)$ a temperatura do ponto x da barra no instante t; $T_1=u(x;t)$ e $T_2=u(x+\Delta x;t)$ as temperaturas das placas P_1 e P_2 respectivamente. Então, pela Lei de Fourier, o fluxo de calor na direção positiva do eixo x que passa pela seção transversal fixada em x é dada por:

$$\begin{aligned}\phi(x;t) &= -\lim_{\Delta x\to 0} k\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x} \\ &= -ku_x(x,t)\end{aligned} \tag{3}$$

Sendo que quando a temperatura cresce com x, u_x é positivo, mas o calor flui para a esquerda, logo ϕ é negativo, caso contrario ϕ é positivo. Vamos calcular Q que entra no segmento $x=a$ e $x=b$ durante o período t_0 e t_1:

$$\begin{aligned}Q &= \int_{t_0}^{t_1}\phi(a,t)Adt-\int_{t_0}^{t_1}\phi(b,t)Adt \\ &= \int_{t_0}^{t_1}kA[u_x(b,t)-u_x(a,t)]dt.\end{aligned} \tag{4}$$

Esta é a diferença entre o calor que entra na seção transversal $x=a$ e o calor que sai pela seção transversal $x=b$ durante t_0 e t_1. Mas pelo Teorema Fundamental do Cálculo, podemos escrever:

$$u_x(b,t)-u_x(a,t)=\int_a^b u_{xx}(x,t)dx \tag{5}$$

Logo, como k é uma constante, temos:

$$Q=kA\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b u_{xx}(x,t)dxdt \tag{6}$$

Por outro lado, experimentalmente a quantidade de calor absorvido por uma substância em um período de tempo é:

$$Q=cm\Delta u \tag{7}$$

Onde (c) é o calor específico medido em Joules/kg.
Aplicando novamente a Lei de Condução do Calor de Fourier a um segmento qualquer da barra entre $x=a$ e $x=b$.

$$\Delta u=\frac{1}{b-a}\int_a^b[u(x,t_1)-u(x,t_0)]dx \tag{8}$$

Logo, a quantidade de calor absorvida por este segmento é:

$$Q=cm\Delta u=\frac{cm}{b-a}\int_a^b\int_{t_0}^{t_1}u_t(x,t)dtdx \tag{9}$$

com m sendo massa deste segmento e c o calor específico do material.
Por outro lado, escrevendo $m=\rho A(b-a)$, onde ρ é a densidade volumétrica da barra, obtemos:

$$Q=c\rho A\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b u_t(x,t)dxdt. \tag{10}$$

Igualando as duas expressões obtidas em (6) e (10) e para a quantidade total de calor que entra no segmento da barra entre x=a e x=b no período de t_0 até t_1, obtemos a equação do calor em sua forma integral:

$$cp\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b u_t(x,t)dxdt=k\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b u_{xx}(x,t)dxdt. \tag{11}$$

Mas $a;b;t_0;t_1$ são arbitrários, logo os integrandos são iguais e assim obtemos a equação do calor na sua forma diferencial:

$$u_t=Ku_{xx} \tag{12}$$

onde $K=k/cp$ é chamada a difusividade térmica do material. A equação (12) é chamada simplesmente de Equação do Calor.

Conclusão

A equação do calor representa a lei da variação da temperatura $u(x,t)$ de uma barra uniforme com superfície lateral termicamente isolada. Ela descreve como o calor se espalha ou se difunde com o passar do tempo. E é muito importante também para a história, já que é através dela que foi desenvolvido e que começamos os estudos das Séries de Fourier.

Referências

[1] Boyce, William E., Richard C. DiPrima, and Charles W. Haines. *Elementary differential equations and boundary value problems* Vol. 9. New York: Wiley, 1969.

[2] FIGUEIREDO, Djairo. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais* (Projeto Euclides). Rio de Janeiro: IMPA.

[3] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise*, vol. 1 e 2. 1976.

[4] SANTOS, Reginaldo. *Séries de Fourrier e Equações Diferenciais Parciais*, 2007. http://www.mat.ufmg.br/ regi

Agradecimentos

A Professora Sandra Lima por sua dedicação no sucesso desse projeto e ao IMPA pela oportunidade.