Dinâmicas lentas para semigrupos auto-adjuntos e grupos unitários de evolução

Genilson Santana

Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG

gesoares2017@gmail.com

Trabalho em conjunto com Moacir Aloísio (UFVJM), Silas Carvalho (UFMG) e Cesar Oliveira (UFSCar).

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Nós obtemos dinâmicas lentas para semigrupos auto-ajduntos e grupos unitários de evolução. Para semigrupos, a dinâmica lenta é para as órbitas, e para probabilidade de retorno no caso de grupos unitários de evolução.

Introdução

A existência de órbitas de operadores semigrupos que convergem arbitrariamente lenta a zero tem sido estudada por diversos autores nas últimas duas décadas. Com respeito ao caso contínuo Müller and Tomilov [4] mostraram, por exemplo, que para $(T(t))_{\geq 0}$ C_0-semigrupo definido em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ que seja fracamente estável (i.e. a família converge fracamente a zero para $t \to \infty$) tal que $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\ln \|T(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}}{t} = 0$ e uma função limitada $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow (0,\infty)$ tal que $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 0$ e seja $\varepsilon > 0$. Então existe $\psi \in \mathcal{H}$ de modo que $\|\psi\|_{\mathcal{H}} < \sup\limits_{t\geq 0}\{g(t)\} + \varepsilon$ e

$$|\langle T(t)\psi, \psi\rangle| > g(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{1}$$

Em trabalhos recentes Aloísio, Carvalho e Oliveira [2, 3] exploraram o resultado anterior para mostrar que as taxas de decaimento para órbitas de semigrupos, estáveis que não são exponencialmente estáveis, tipicamente no sentido Baire, dependem de uma sequência de tempo indo para o infinito. Para o caso de semigrupos auto-adjuntos [3], eles também mostraram que existe uma relação explicita entre as dinâmicas do semigrupo e propriedades espectrais de escalas locais.

Resultados

Para o que se segue $\mathcal{H}$ denotará um espaço de Hilbert complexo e separável.

Seja T um operador auto-adjunto, negativo, puramente pontual e $(\eta_n)_{n\geq 1}$ os auto-vetores normalizados de T, assim $T\eta_n = \lambda_n\eta_n$, com $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset (-\infty, 0)$ os auto-valores correspondentes e que satisfaçam $\limsup\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Para $\psi = \sum\limits_{j=1}^{N} b_j\eta_j \in \mathcal{H}$, temos $\|e^{tT}\psi\|_{\mathcal{H}} \leq N \max\limits_{1\leq j\leq N} |b_j| e^{\lambda t}$, com $\lambda = \max\limits_{1\leq j\leq N} \lambda_j < 0$, ou seja, para estes dados iniciais, as órbitas convergem a zero exponencialmente. Pelo Teorema de Müller e Tomilov [4], dado $\beta : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ com $\lim\limits_{t\to\infty} \beta(t) = \infty$, existe $\psi \in \mathcal{H}$ tal que

$$\limsup_{t\to\infty} \beta(t)\|e^{tT}\psi\|_{\mathcal{H}} = \infty,$$

já que $0 \in \sigma(T)$ neste caso. Neste contexto propomos:

Teorema 1: Seja $\beta : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ uma função sobrejetiva crescente tal que $\lim\limits_{t\to\infty} \beta(t) = \infty$.

i) Se T auto-adjunto, negativo, puramente pontual como acima. Dado $\psi \in \mathcal{H}$, existe uma seqência $(\psi_k)_{k\geq 1} \subset \mathcal{H}$ que converge a ψ tal que, $\forall\, k \in \mathbb{N}$,

$$\limsup_{t\to\infty} \beta(t)\|e^{tT}\psi_k\|_{\mathcal{H}} = \infty\,.$$

ii) Se T é um operador auto-adjunto, negativo e limitado, então para cada $0 \neq \psi \in \mathcal{H}$, existe uma sequência $(T_k)_{k\geq 1}$ de operadores auto-adjuntos, nagativos, puramente pontuais e limitados que converge fortemente a T tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\limsup_{t\to\infty} \beta(t)\|e^{tT_k}\psi\|_{\mathcal{H}} = \infty\,.$$

Observação: O vetor ψ_k do item i) do Teorema acima pode ser descrito da seguinte maneira: Seja $\psi = \sum\limits_{l=1}^{\infty} b_l\eta_l$ e, para cada subsequência (λ_{j_l}) de auto-valores de T com $\lambda_{j_l} \uparrow 0$ e $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \dfrac{1}{\beta(1/|\lambda_{j_l}|)} < \infty$, assim $\psi_k = \sum_{l=1}^{k} b_l\eta_l + \sum\limits_{l=k+1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{\beta(1/|\lambda_{j_l}|)}}\eta_{j_l}$. Para o dado inicial não-nulo $\psi \in \mathcal{H}$, o item ii) do Teorema diz que sempre podemos perturbar(fortemente) o gerador infinitesimal auto-adjunto, limitado e negativo T de modo que a nova órbita de ψ convirja mais lentamente do que uma velocidade descrita por $\beta(t)$, pelo menos por uma sequência de tempo indo para o infinito.

Agora passemos para os grupos unitários de evolução. Dado um operador auto-adjunto T em $\mathcal{H}$, dizemos que $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{-itT}$ é um grupo unitário a 1-parâmetro formente contínuo de evolução, e para cada $\psi \in \mathcal{H}$, $(e^{-itT}\psi)_{t\in\mathbb{R}}$ é a única solução para a equação de Schrödinger

$$\begin{cases} \partial_t\psi = -iT\psi, & t \in \mathbb{R}, \\ \psi(0) = \psi \in \operatorname{dom} T. \end{cases}$$

A quantidade dinâmica padrão que investiga o comportamento temporal de $e^{-itT}\psi$, e importante na mecânica quântica, é a chamada *probabilidade de retorno*,

$$W_\psi^T(t) := \frac{1}{t}\int_0^t |\langle e^{-isT}\psi, \psi\rangle|^2\, \mathrm{d}s.$$

Pelo Teorema Espectral e pelo Lema de Wiener, obtemos

$$\lim_{t\to\infty} W_\psi^T(t) = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} |\mu_\psi^T(\{\lambda\})|^2;$$

em particular, se T possui espectro puramente contínuo, então

$$\lim_{t\to\infty} W_\psi^T(t) = 0.$$

Neste contexto propomos o seguinte resultado:

Teorema 2: Seja T um operador auto-adjunto com espectro puramente contínuo. Então, existe um vetor $\psi \in \mathcal{H}$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$, $\limsup\limits_{t\to\infty} t^{\varepsilon}\, W_\psi^T(t) = \infty$.

Já para sistemas com espectro puramente absolutamente contínuo, mostramos que

Teorema 3: Seja T um operador auto-adjunto, limitado com espectro puramente absolutamente contínuo. Então o conjunto de $\psi \in \mathcal{H}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\liminf\limits_{t\to\infty} t^{1-1/k} W_\psi^T(t) = 0$ e $\limsup\limits_{t\to\infty} t^{1/k} W_\psi^T(t) = \infty$ é um conjunto genérico em $\mathcal{H}$.

Referências

[1] M. Alosio, S. Carvalho, C. R. de Oliveira and G. Santana. Slow dynamics for self-adjoint semigroups and unitary evolution groups. (preprint)

[2] M. Aloisio, S. L. Carvalho and C. R. de Oliveira, Category theorems for Schrödinger semigroups. Z. Anal. Anwend. **39** (2020), 421–431.

[3] M. Aloisio, S. L. Carvalho and C. R. de Oliveira, Refined scales of decaying rates of operator semigroups on Hilbert spaces: typical behavior. Proc. Amer. Math. Soc. **148** (2020), 2509–2523.

[4] V. Müller and Y. Tomilov, "Large" weak orbits of C_0-semigroups. Acta Sci. Math. (Szeged) **79** (2013), 475–505.

Agradecimentos

Agradecemos à CAPES, à FAPEMIG, ao CNPq pelo suporte fincacneiro para realização deste trabalho. E ao IMPA pela oportunidade de apresentá-lo.