Geometria da ação de grupos Fuchsianos

Gabrieli Kmiecik

Universidade Federal do Paraná - Departamento de Matemática

gabrieli.kmiecik@ufpr.br

Resumo

Em Geometria, é comum o estudo de transformações que preservam alguma estrutura em um conjunto. Um exemplo disso é o estudo de isometrias, isto é, funções que preservam distâncias em um espaço métrico. Na Geometria Hiperbólica, o grupo das isometrias que preservam orientação é dado pelas Transformações de Möbius. Estudamos as propriedades da ação de subgrupos discretos desse grupo, conhecidos como grupos Fuchsianos, no plano Hiperbólico. Mas como saber se um grupo é Fuchsiano ou não? Este trabalho apresenta uma ferramenta que nos ajuda a identificá-los.

Introdução

A história da Geometria Hiperbólica começa no século XIX, quando o matemático Gauss provou que existiam modelos de geometria para os quais valiam apenas os quatro primeiros axiomas de Euclides, mas o axioma das paralelas falhava. Anos depois, Lobachevsky e Bolyai chegam aos mesmos resultados de Gauss, de forma independente.

Existem alguns modelos para a Geometria Hiperbólica, mas o mais conhecido é o modelo do semiplano de Poincaré, que é o conjunto $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$ e tem a métrica proveniente da norma hiperbólica: $\|v\|_z := \dfrac{\|v\|}{\mathrm{Im}(z)}$.

Em 1872, o matemático alemão Felix Klein divulgou o Programa Erlangen, que é um método para caracterizar as geometrias de espaços de acordo com os seus grupos de simetrias. Para o caso da Geometria Euclidiana ou da Geometria Esférica, entender os grupos de simetrias não é uma tarefa difícil, já que temos uma descrição completa de todos os grupos discretos de isometrias. Já no plano Hiperbólico, a classificação completa não é algo trivial. Por isso é interessante um estudo mais detalhado dos grupos discretos de isometrias de $\mathbb{H}$. Iniciaremos este trabalho definindo as isometrias do plano hiperbólico e depois partiremos para a caracterização dos grupos Fuchsianos.

As isometrias de $\mathbb{H}$ que preservam orientação são as Transformações de Möbius:

Definição 1. *Uma **Transformação de Möbius** é uma função $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ da forma:*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1.$$

As transformações de Möbius formam um grupo, denotado por Möb$(\mathbb{H})$. $T(z)$ é representada matricialmente como

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [a\,b; c\,d]\,.$$

Note que $[a\,b; c\,d]$ e $[-a\ -b; -c\ -d]$ representam a mesma transformação e têm determinante 1. Portanto, uma mesma transformação de Möbius pode ser representada por duas matrizes distintas, a saber, $\pm\,[T]$.

Podemos mostrar que Möb$(\mathbb{H})$ é isomorfo ao grupo PSL$(2,\mathbb{R})$, que é o quociente do grupo SL$(2,\mathbb{R})$ (grupo de matrizes 2×2 com entradas reais, cujo determinante é igual a 1), pelo subgrupo $\{\pm id\}$. O grupo PSL$(2,\mathbb{R})$ vem munido do quociente da topologia em $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$, induzida de $\mathbb{R}^4$.

Definição 2. *Um **grupo Fuchsiano** é um subgrupo discreto de PSL$(2,\mathbb{R})$.*

Exemplos:

1. O subgrupo das translações por inteiros é Fuchsiano:
$$\{T(z) = z + n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}.$$
2. O subgrupo de todas as translações **não** é Fuchsiano, pois não é discreto:
$$\{T(z) = z + b \mid b \in \mathbb{R}\}.$$
3. O grupo modular é um grupo Fuchsiano:
$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Definição 3. *Uma família $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de subconjuntos de $\mathbb{H}$ é **localmente finita** se, para qualquer $K \subset \mathbb{H}$ compacto, $M_\alpha \cap K \neq \varnothing$ apenas para finitos $\alpha \in A$.*

Definição 4. *Dados $\Gamma \in PSL(2,\mathbb{R})$ e $z \in \mathbb{H}$, a **Γ-órbita de z** é o conjunto $\Gamma z := \{\gamma(z) \mid \gamma \in \Gamma\}$.*

Definição 5. *Um grupo Γ **age propriamente descontinuamente** em $\mathbb{H}$ se a $\Gamma-$órbita de qualquer ponto $z \in \mathbb{H}$ é localmente finita.*

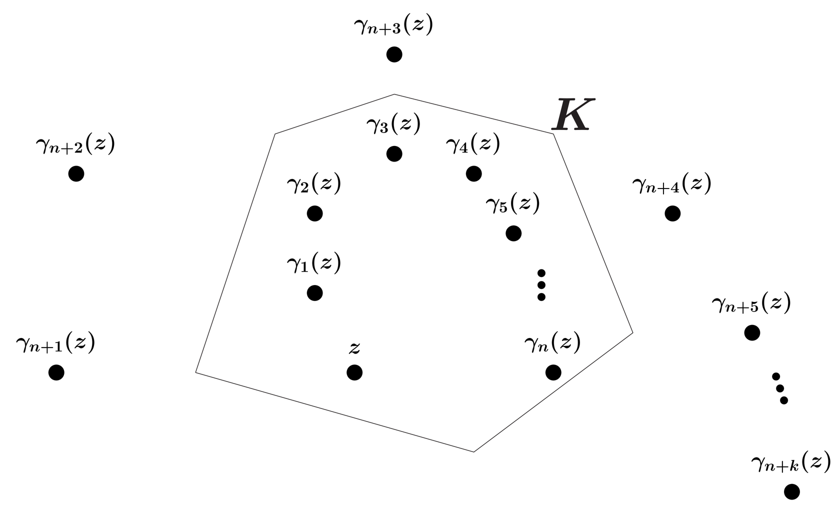

Figura 1: Ação propriamente descontínua.

Lema 1. *Seja $z_0 \in \mathbb{H}$ e $K \subset \mathbb{H}$ um compacto. Então $E = \{T \in PSL(2,\mathbb{R}) \,|\, T(z_0) \in K\}$ é compacto.*

Lema 2. *Seja Γ um grupo Fuchsiano não-trivial. Então existe um ponto $p \in \mathbb{H}$ que não é ponto fixo de nenhum elemento de Γ exceto a identidade.*

Teorema 1. *Seja $\Gamma \leq PSL(2,\mathbb{R})$. Então Γ é Fuchsiano se, e somente se, Γ age propriamente descontinuamente em $\mathbb{H}$.*

Demonstração. Suponha Γ Fuchsiano. Tome $z \in \mathbb{H}$ e $K \subset \mathbb{H}$ um compacto. Vamos mostrar que $\Gamma z \cap K$ é finita. De fato, seja $A = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(z) \in K\}$ então - $A = \{\gamma \in PSL(2,\mathbb{R}) \mid \gamma(z) \in K\} \cap \Gamma$. Como Γ é discreto e, do Lema 1, A é compacto, a intersecção deles é um conjunto finito. Assim, Γz é localmente finita $\Rightarrow \Gamma$ age propriamente descontinuamente em $\mathbb{H}$.

Reciprocamente, suponha que Γ age propriamente descontinuamente em $\mathbb{H}$ mas não é discreto. Podemos construir uma sequência $\gamma_n \to id$. Do lema 2, existe $z \in \mathbb{H}$ que não é fixado por ninguém de $\Gamma\backslash\{id\}$. Aplicando cada γ_n nesse ponto, teremos uma sequência $\gamma_n(z) \to z$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ vale que $\gamma_n(z) \in \overline{B}(z,\epsilon)$. Portanto, existem infinitos pontos de Γz em $\overline{B}$. Assim, Γ não age propriamente descontinuamente. Contradição. □

Corolário 1.1. *Seja Γ um subgrupo do $PSL(2,\mathbb{R})$. Então, Γ age propriamente descontinuamente em $\mathbb{H} \Leftrightarrow$ para todo $z \in \mathbb{H}$, a Γ-órbita de z é um subconjunto discreto de $\mathbb{H}$.*

Referências

[1] Svetlana KATOK. *Fuchsian Groups*. The University of Chicago Press, Chicago, 1992.

Agradecimentos. Agradeço à minha orientadora, Gisele T. Paula, por toda a dedicação e incentivo na realização deste estudo, ao grupo PET Matemática UFPR, pelo fomento da bolsa e incentivo à pesquisa individual e ao IMPA pela oportunidade de apresentar o trabalho desenvolvido.