Anel de Grothendieck de Variedades

Gabriela Gomes Gularte & Marcos Benevenuto Jardim

IMECC - Universidade Estadual de Campinas

gularte.gabriela@outlook.com

UNICAMP

Resumo

O anel de Grothendieck de variedades sobre um corpo k é um anel gerado pelas classes de isomorfismo de variedades sobre k, com uma relação de "recorte e colagem" em relação a subvariedades fechadas. O objetivo deste trabalho é apresentar o anel de Grothendieck, explorando suas propriedades e definições alternativas. Também calcularemos algumas classes de variedades e mostraremos que a racionalidade estável de uma variedade pode ser detectada pela classe correspondente no anel de Grothendieck, destacando a relação desta estrutura com a geometria birracional.

Anel de Grothendieck

Definição 1. *O anel de Grothendieck $K_0(\mathrm{Var}_k)$ é o quociente do grupo abeliano livre gerado pelas classes de isomorfismos de k-variedades pela relação $[X \setminus Y] = [X] - [Y]$, onde Y é um subesquema fechado de X; a estrutura de anel é induzida pelo produto fibrado sobre k: $[X] \cdot [X'] = \left[(X \times_k X')_{\mathrm{red}} \right]$.*

Algumas classes

Seja k um corpo. Em $K_0(\mathrm{Var}_k)$ temos:

(1) $[\varnothing] = 0$;

(2) $[Spec(k)] = 1$;

(3) $\left[\mathbb{P}^n_k\right] = 1 + \mathbb{L} + \cdots + \mathbb{L}^n$, onde $\mathbb{L} := \left[\mathbb{A}^1_k\right]$.

Proposição 2. *Propriedades*

(i) Se X é uma variedade e U e V são duas subvariedades localmente fechadas em X, então

$$[U \cup V] + [U \cap V] = [U] + [V].$$

(ii) Se a variedade X é uma união disjunta de subvariedades localmente fechadas $X_1, \ldots, X_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$ então

$$[X] = \sum_{i=1}^{n} [X_i].$$

(iii) Seja C um subconjunto construtível de uma variedade X, então C tem uma classe em $K_0(\mathrm{Var}_k)$.

Lema 3. *Seja $Z \subset Y$ uma subvariedade de codimensão d. Considere um morfismo próprio $f : X \to Y$ entre variedades suaves, onde f é uma explosão com um centro suave $Z \subset Y$ de codimensão d. Então, temos*

$$\left[f^{-1}(Z)\right] = [Z] \cdot \left[\mathbb{P}^{d-1}\right]$$

no anel de Grothendieck $K_0(\mathrm{Var}_k)$.

Mais algumas classes

Seja k um corpo. Em $K_0(\mathrm{Var}_k)$ temos:

(1) $[Gl_n] = (\mathbb{L}^n - 1)(\mathbb{L}^n - \mathbb{L}) \ldots \left(\mathbb{L}^n - \mathbb{L}^{n-1}\right)$;

(2) $[Gr(2,4)] = \mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^3 + 2\mathbb{L}^2 + \mathbb{L} + 1$;

(3) $\left[Bl(\mathbb{P}^2, pt)\right] = (\mathbb{L} + 1)^2 = \left[\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1\right]$.

Definição 4 (Bittner). *O anel de Grothendieck de k-variedades possui as seguintes apresentações alternativas:*

*(i) **(sm)** Como o grupo abeliano gerado pelas classes de isomorfismo de variedades suaves sobre k sujeito as relações $[X] = [X - Y] + [Y]$, onde X é suave e $Y \subset X$ é uma subvariedade fechada suave.*

*(ii) **(bl)** Como o grupo abeliano gerado pelas classes de isomorfismo de k-variedades suaves completas sujeito à relação $[\varnothing] = 0$ e $[\mathrm{Bl}_Y X] = [X] - [Y] + [E]$, onde X é suave e completa, $Y \subset X$ uma subvariedade suave fechada, $\mathrm{Bl}_Y X$ a explosão de X ao longo de Y e E o divisor excepcional desta explosão.*

Geometria Birracional

Definição 5. *Dizemos que variedades (irredutíveis) X e Y são estavelmente birracionais se $X \times \mathbb{P}^k$ é birracional a $Y \times \mathbb{P}^l$ para algum $k, l \geqslant 0$.*

Teorema 6 (Larsen-Lunts). *Seja G um monóide abeliano e $\mathbb{Z}[\mathrm{G}]$ o anel monóide correspondente. Denotamos por $\mathfrak{M}$ o monóide multiplicativo de classes de isomorfismo de variedades completas, suaves e irredutíveis. Seja $\Psi : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathrm{G}$ um homomorfismo de monóides tal que:*

(i) $\Psi([X]) = \Psi([Y])$ se X e Y são birracionais.

(ii) $\Psi[\mathbb{P}^n] = 1$ para todo $n \geqslant 0$.

Então existe um único homomorfismo $\Phi : K_0(\mathrm{Var}_k) \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathrm{G}]$ tal que $\Phi([X]) = \Psi([X])$ para $[X] \in \mathfrak{M}$.

Observação 7. *Seja SB o monoide multiplicativo de classes de equivalência estavelmente birracionais de variedades. Existe um homomorfismo canônico sobrejetor $\Psi_{SB} : \mathfrak{M} \longrightarrow SB$ que satisfaz as hipóteses (1) e (2) do Teorema 6 (com $\Psi_{SB} = \Psi, \mathrm{G} = SB$). Denote por Φ_{SB} o homomorfismo de anéis de $K_0(\mathrm{Var}_k)$ em $\mathbb{Z}[SB]$, correspondendo a Ψ_{SB}.*

Corolário 8. *Sejam $X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_m$ variedades suaves, completas e conexas. Sejam $m_i, n_j \in \mathbb{Z}$ tais que $\Sigma m_i [X_i] = \Sigma n_j \left[Y_j\right]$ em $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$. Então $k = m$ e, depois de enumerar, as variedades X_i e Y_i são estavelmente birracionais e $m_i = n_j$.*

Proposição 9. *O núcleo do homomorfismo (sobrejetor) $\Phi_{SB} : K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathbb{Z}[SB]$ é o ideal principal gerado pela classe $\left[\mathbb{A}^1\right] = \mathbb{L}$ da linha afim $\mathbb{A}^1$.*

Demonstração. Pelo Teorema 6, Φ_{SB} é obtido de forma única a partir de Ψ_{SB}, Assim, $\Phi_{SB}([\mathbb{P}^n]) = 1, \forall n$, logo $\Phi_{SB}\left(\left[\mathbb{P}^1\right]\right) = 1 = \Phi_{SB}\left([1] + \left[\mathbb{A}^1\right]\right)$ e, portanto, $\Phi_{SB}\left(\mathbb{A}^1\right) = 0$. Seja $a \in \mathrm{Ker}(\phi_{SB})$, escrevemos: $a = [X_1] + \ldots + [X_k] - [Y_1] - \ldots - [Y_l]$, onde X_i e Y_j são variedades suaves, completas e conexas. Como $\Phi_{SB}(a) = \Sigma\Psi_{SB}(X_i) - \Sigma\Psi_{SB}\left(Y_j\right) = 0$, concluímos que $k = l$ e X_i é birracionalmente estável a Y_i. Vamos mostrar que se X e Y são suaves, completas e birracionais, então $[X] - [Y] \in K_0(\mathrm{Var}_k) \cdot \left[\mathbb{A}^1\right]$. Note que $\left[X \times \mathbb{P}^k\right] - [X] = [X] \cdot \left[\mathbb{A}^1 + \mathbb{A}^2 + \ldots + \mathbb{A}^k\right]$, então podemos assumir que $[X]$ e $[Y]$ são birracionais. E pelo Teorema de Fatoração Fraca, assumimos que X é uma explosão de Y com centro suave $Z \subset Y$ e divisor excepcional $E \subset X$. Então, pelo Lema 3 temos $[E] = \left[\mathbb{P}^t\right] \cdot [Z]$ para algum t e $[X] - [Y] = [E] - [Z] = \left(\left[\mathbb{A}^1\right] + \left[\mathbb{A}^2\right] + \ldots + \left[\mathbb{A}^t\right]\right)[Z]$. □

Corolário 10. *Sejam X e X' variedades suaves e próprias sobre um corpo k de característica zero. Então X e X' são estavelmente birracionais se, e somente se, suas classes $[X]$ e $\left[X'\right]$ em $K_0(\mathrm{Var}_k)$ são congruentes módulo $\mathbb{L}$. Em particular, $[X]$ é congruente a um inteiro c módulo $\mathbb{L}$ se, e somente se, cada uma de suas componentes conexas é estavelmente racional; nesse caso c é o número de componentes conexas de X.*

Referências

[1] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.

[2] Neeraja Sahasrabudhe. Grothendieck ring of varieties. Master's thesis, Université Bordeaux, Bordeaux, 2007.

[3] Johannes Nicaise; Evgeny Shinder. The motivic nearby fiber and degeneration of stable rationality. *Inventiones mathematicae*, 217:377–413, 2019.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.