Resolubilidade global de uma classe de campos vetoriais no toro

Gabriel Valle

Universidade Estadual de Campinas

g216349@dac.unicamp.br

UNICAMP

Resumo

Apresentamos aqui um dos teoremas que constam no artigo [BP], que discute as condições necessárias e suficientes para a resolubilidade global dos campos de tipo

$$L = \partial_t + a(x)\partial_x, \quad a \in C^\infty(\mathbb{T}^1) \tag{1}$$

Introdução

Se X e Y são espaços vetoriais topológicos localmente convexos, uma implicação do Teorema de Hahn-Banach é que, para cada transformação linear $T : X \to Y$, o anulador relaciona a imagem de T com o núcleo do operador transposto ${}^tT : Y' \to X'$ por meio da igualdade

$$(\ker {}^tT)^\circ = \overline{\mathcal{R}(T)}$$

Disso segue uma condição útil que caracteriza quando um campo vetorial L possui imagem fechada: $\forall f \in (\ker {}^tL)^\circ$ deve existir u tal que $Lu = f$. Por isso, um campo se diz globalmente resolúvel quando possui imagem fechada.

Vamos considerar o campo L em (1) agindo no espaço das funções $C^\infty(\mathbb{T}^2)$.

Um teorema de existência de Borel

Começamos apresentando um teorema de existência atribuído a Émile Borel. Esse resultado é fundamental para a construção das soluções que constam no teorema seguinte.

Teorema 1. *Sejam $(v_j)_{j\in\mathbb{N}^+} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ 2π-periódicas e $\delta > 0$, existem $r > 0$ e $v \in C^\infty((-\delta,\delta)\times\mathbb{R})$ 2π-periódica na segunda variável tal que $\operatorname{supp} v \subset [-r,r]\times\mathbb{R}$ e $\forall j > 0, \partial_1^j v(0,\cdot) = v_j$.*

Dem. Vamos escolher funções $g_j \in C^\infty((-\delta,\delta)\times\mathbb{R})$ de modo que $v = \sum_1^\infty g_j$ defina uma série de potências com as condições desejadas. Para isso, tome constante positiva $r < \delta$ e $g \in C_c^\infty((-r,r)\times\mathbb{R})$ com $g|_{[-r/2,r/2]} \equiv 1$. Então defina

$$g_j(x,t) \doteq \frac{1}{j!}g(x/\epsilon_j)v_j(t)x^j, \quad j \in \mathbb{N}^+$$

com $\epsilon_j \in (0,1)$ constantes pré-fixadas a se ajustar posteriormente. Desse modo é claro que cada g_j é C^∞, 2π-periódica em t e que $\operatorname{supp} g_j \subset (-r\epsilon_j, r\epsilon_j)\times\mathbb{R}$.

Estimando o módulo das derivadas $\partial^\alpha g_j$ com ordem $|\alpha| \leq j-1$ obtemos para $\alpha = (\alpha_x,\alpha_t)$ e $(x,t) \in (-r\epsilon_j, r\epsilon_j)\times\mathbb{R}$.

$$|\partial^\alpha g(x,t)| \leqslant \frac{1}{j!}\|\partial^{\alpha_t}v_j\||\partial^{\alpha_x}(g(x/\epsilon_j)x^j)|$$

$$= \frac{1}{j!}\|\partial^{\alpha_t}v_j\|\left|\sum_{k\leq\alpha_x}\binom{\alpha_x}{k}\partial^k(x^j)\left(\epsilon_j^{\alpha_x-k}\partial^{\alpha_x-k}g(x/\epsilon_j)\right)\right|$$

$$\leqslant \alpha_x!\|\partial^{\alpha_t}v_j\|\epsilon_j^{j-\alpha_x}\sum_{k\leq\alpha_x} r^{j-l}\|\partial^{\alpha_x-l}g\| = C_{\alpha,j}\epsilon_j^{j-\alpha_x}$$

sendo $C_{\alpha,j}$ constante independende de ϵ_j, x e t. Como $\operatorname{supp} g_j \subset (-r\epsilon_j, r\epsilon_j)$, segue que $\sup|\partial^\alpha g_j| \leq C_{\alpha,j}\epsilon_j^{j-\alpha_x}$. Logo escolhendo cada $\epsilon_j \in (0,1)$ suficientemente pequeno, obtemos $\sup|\partial^\alpha g_j| \leq 2^{-j}$ e portanto $\sum_{j=0}^\infty \partial^\alpha g_j$ converge uniformemente. Com isso $v \in C^\infty((-\delta,\delta)\times\mathbb{R})$ e pela regra de Leibniz

$$\partial_x^j g_k(0,\cdot) = \delta_{j,k}v_k$$

então v de fato tem as propriedades do teorema. □

Com identificações apropriadas, transportamos esse resultado para $\mathbb{T}^2$, que é o domínio de interesse do problema de resolubilidade do campo L.

Corolário 2. *Dados $V \subset \mathbb{T}^2$ vizinhança aberta de $\{x_0\}\times\mathbb{T}^1$ e $(v_j)_{j\in\mathbb{N}^+} \subset C^\infty(\mathbb{T}^1)$, então $\exists v \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ com $\operatorname{supp} v \subset V$ e $\partial_x^j v(x_0,\cdot) = v_j, \forall j \in \mathbb{N}^+$.*

Um caso no qual L é resolúvel a menos de função *flat* em $a^{-1}(0)$

Teorema 3. *Se $\emptyset \neq a^{-1}(0) \neq \mathbb{T}^1$ e os zeros de a são de ordem finita, para cada $f \in (\ker {}^tL)^\circ$ existe $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ tal que $Lu - f$ é flat em $a^{-1}(0)$.*

Dem. Como os zeros de a tem ordem finita, $a^{-1}(0) \doteq \{x_1,\ldots,x_N\} \subset \mathbb{T}^1$ é finito e $\forall l$, $\exists V_l$ aberto em $\{x_l\}\times\mathbb{T}^1$ tal que $(V_l)_{1\leq l\leq N}$ são disjuntos. Assim se mostrarmos que $\forall l, \exists u_l \in \mathbb{T}^2$ com $\operatorname{supp} u_l \subset V_l$ e $Lu_l - f$ flat em $x_l\times\mathbb{T}^1$, o resultado segue considerando $u = \sum_l u_l$.

Fixado um $x_l \in a^{-1}(0)$ zero de ordem n, considere a transformação linear $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(C^\infty(\mathbb{T}^2), \prod_{j\in\mathbb{N}^+}C^\infty(\mathbb{T}^1))$ dada por $v \mapsto \left(\frac{1}{j!}\partial^j v_x(x_l,\cdot)\right)_j$, então observe que $v \in \ker T$ sse v é flat em $\{x_l\}\times\mathbb{T}^1$. Para $v \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, denotando $Tv = (v_j)$ e $T(a\times\{0\}) = (a_j)$, para cada $j \in \mathbb{N}^+$,

$$Lv = \partial_t v + a(x)\partial_x v \implies \pi_j \circ T(Lv) = \tag{2}$$

$$\frac{1}{j!}(\partial_x^j(\partial_t v + a(x)\partial_x v))(x_l,\cdot) = v_j' + \tag{3}$$

$$\frac{1}{j!}\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}a^{(m)}(x_l)(\partial_x^{j+1-m}v)(x_l,\cdot) = \tag{4}$$

$$v_j' + \sum_{m=0}^{j}(j+1-m)a_m v_{j+1-m} \tag{5}$$

Então dada $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ com $Tf = (f_j)_j$ temos $Lv - f$ flat em $\{x_l\}\times\mathbb{T}^1$ sse

$$v_j' + \sum_{m=0}^{j}(j+1-m)a_m v_{j+1-m} = f_j, \forall j \tag{6}$$

Decompomos $v_j = v_{j,0} + v_{j,1}$ e $f_j = f_{j,0} + f_{j,1}$ com $v_{j,0} = \widehat{v_j}(0)$ e $f_{j,1} = \widehat{f_j}(0)$, assim $v_{j,1}, f_{j,1}$ possuem primitiva. Vamos resolver separadamente (6) para $v_{j,0}, f_{j,0}$ e $v_{j,1}, f_{j,1}$. Desse modo, o sistema de equações a se considerar passa a ser

$$\begin{cases}\sum_{m=0}^{j}(j+1-m)a_m v_{j+1-m,0} = f_{j,0} \\ v_{j,1}' + \sum_{m=0}^{j}(j+1-m)a_m v_{j+1-m,1} = f_{j,1}\end{cases} \tag{7}$$

Como x_l é zero de ordem n, temos $a_1,\ldots,a_{n-1} = 0$ e $a_n \neq 0$ logo a segunda equação em (7) equivale a

$$v_{j,1}' = f_{j,1}, \text{ se } 0 \leq j \leq n-1, \text{ e}$$

$$v_{j,1}' + (j+1-n)a_n v_{j+1-n,0} + \ldots + a_j v_{1,0} = f_{j,1},$$

se $j \geq n$. Visto que cada $f_{j,1}$ tem primitivas de todas as ordens, é possivel determinar $v_{0,1}, v_{1,1},\ldots$ indutivamente de forma a satisfazer o sistema. Similarmente, a primeira linha de (7) equivale a $f_{j,0} = 0,\ 1 \leq j \leq n-1$ e

$$(j+1-n)a_n v_{j+1-n,0} + \ldots + a_j v_{1,0} = f_{j,0},\ j \geq n;$$

então as equações para $j \geq n$ são satisfeitas tomando $v_{1,0} = f_{n,0}/a_n$ e determinando $(v_{k,0})$ por indução.

Observamos que valem as condições $f_{j,0} = 0, j = 0,\ldots,n-1$ pois

$$f_{j,0} = \frac{1}{2\pi j!}\int_{\mathbb{T}^1}\partial_x^j f(x_l,\cdot) = \frac{(-1)^j}{2\pi j!}\langle\partial^j\delta(\tau_{x_l})\otimes 1_t, f\rangle$$

e um cálculo simples mostra que $\partial^j\delta(\tau_{x_l})\otimes 1_t \in \ker {}^tL$.

Então existe família $(v_j) = (v_{j,0} + v_{j,1}) \subset C^\infty(\mathbb{T}^1)$ que satisfaz as relações (6). Daí pelo Teorema 1, $\exists u_l \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ com $\partial_x^j u_l(x_l,\cdot)/j! = v_j, \forall j$ e concluimos que $Lu_l - f$ é flat em $\{x_l\}\times\mathbb{T}^1$. □

[BP] BERGAMASCO, A.P., PETRONILHO G. *Closedness of the Range for Vector Fields on the Torus.* Journal of Differential Equations 154, no. 1 (May 1999): 132–39. https://doi.org/10.1006/jdeq.1998.3563.

Apoio

FAEPEX (Funcamp)