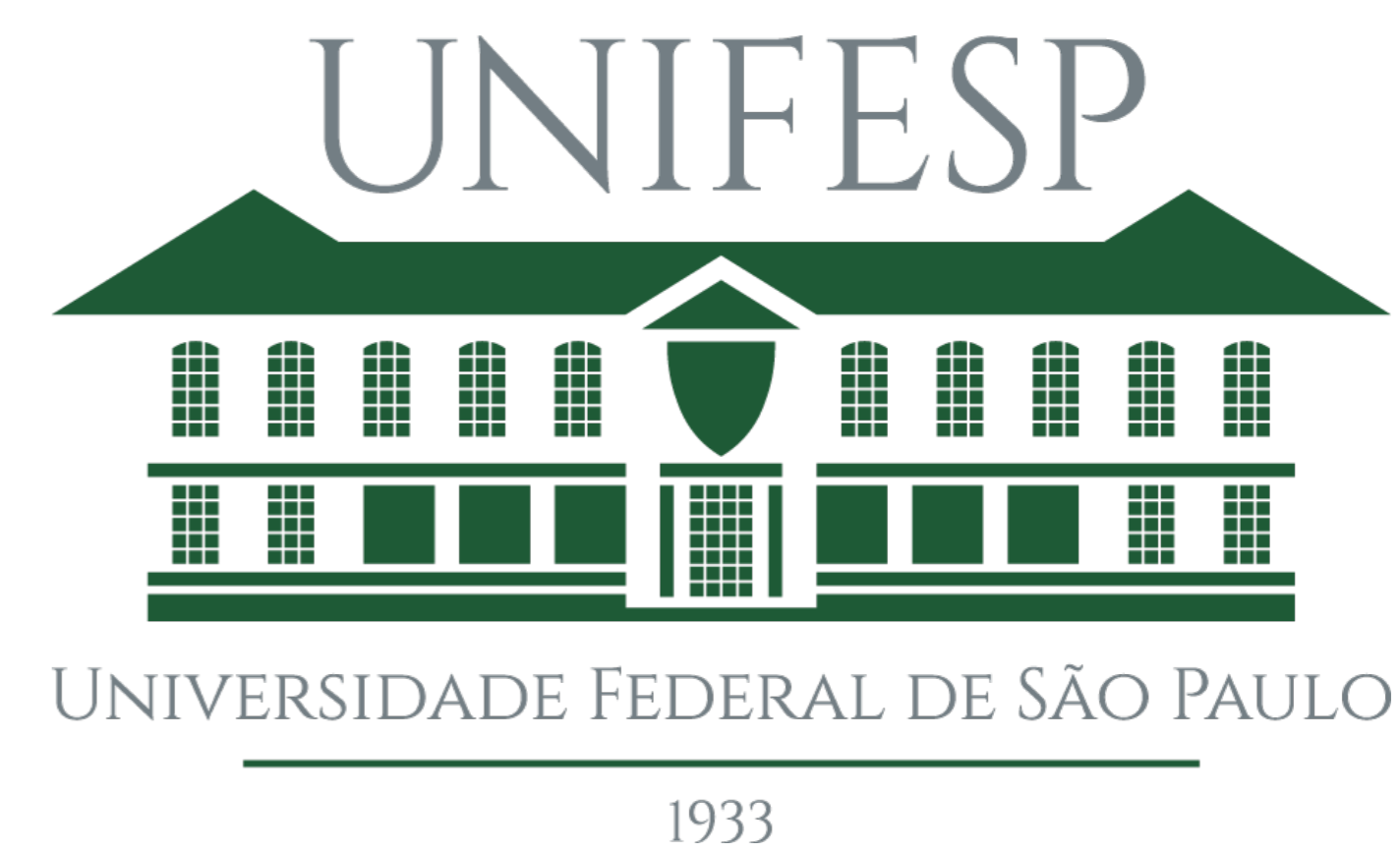


Relações tonais na teoria musical matemática

Gabriel Ronconi Prada

Universidade Federal de São Paulo, Instituto de Ciência e Tecnologia

prada@unifesp.br



Resumo

Nesse trabalho, buscaremos fazer uma introdução a alguns conceitos de teoria musical matemática, principalmente no que diz respeito à modelagem de tons e intervalos, e operações sobre eles.

Introdução

Na música ocidental, os tons são divididos, de acordo com a sua frequência, em 12 classes tonais. Duas notas estão na mesma classe se a proporção entre as frequências for uma potência de 2. Há diversas maneiras de distribuir as frequências restantes: é interessante notar que uma das maneiras que isso era feito na antiguidade era através das proporções de potências de 2, e também de $\frac{3}{2}$, ambos intervalos com sons consoantes e agradáveis, através da *afinação Pitagórica*, cujas proporções podem ser descritas concisamente pela sequência

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \frac{3^n}{2^{\lfloor \log_2 3^n \rfloor}}$$

$a_{12} = \frac{531441}{524288}$, é uma proporção bem próxima a 1. A fim de preservar a presença da oitava no sistema, podemos então aproximar a_{12} por 1 e assim tornar a sequência algo cíclico. Dessa forma, surge uma afinação com 12 tons.

Hoje, principalmente na música popular, a afinação de temperamento igual em 12 tons, cujas proporções são dadas por

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sqrt[12]{2^n}$$

Discussões detalhadas sobre isso podem ser encontradas em [6]. Mas em ambos sistemas, fica evidente a repetição das notas a cada 12 iterações, que é o que vamos explorar.

1 Teoria transformacional

Explorando a natureza cíclica dos tons e a sua consequente semelhança com o grupo $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, o musicólogo David Lewin introduziu a teoria transformacional, em que as operações musicais são vistas como ações do grupo diedral D_{24} [1, 5].

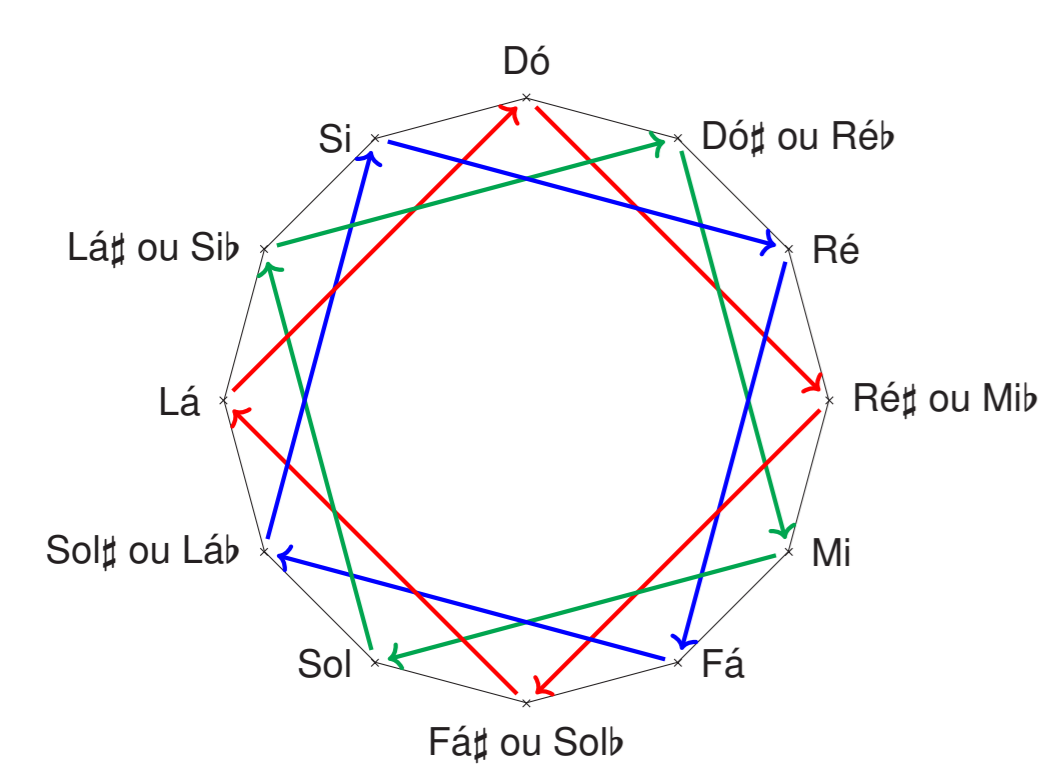


Figura 1: Transformação de “transposição” em três semitons: $T(t) = (t + 3) \bmod 12$

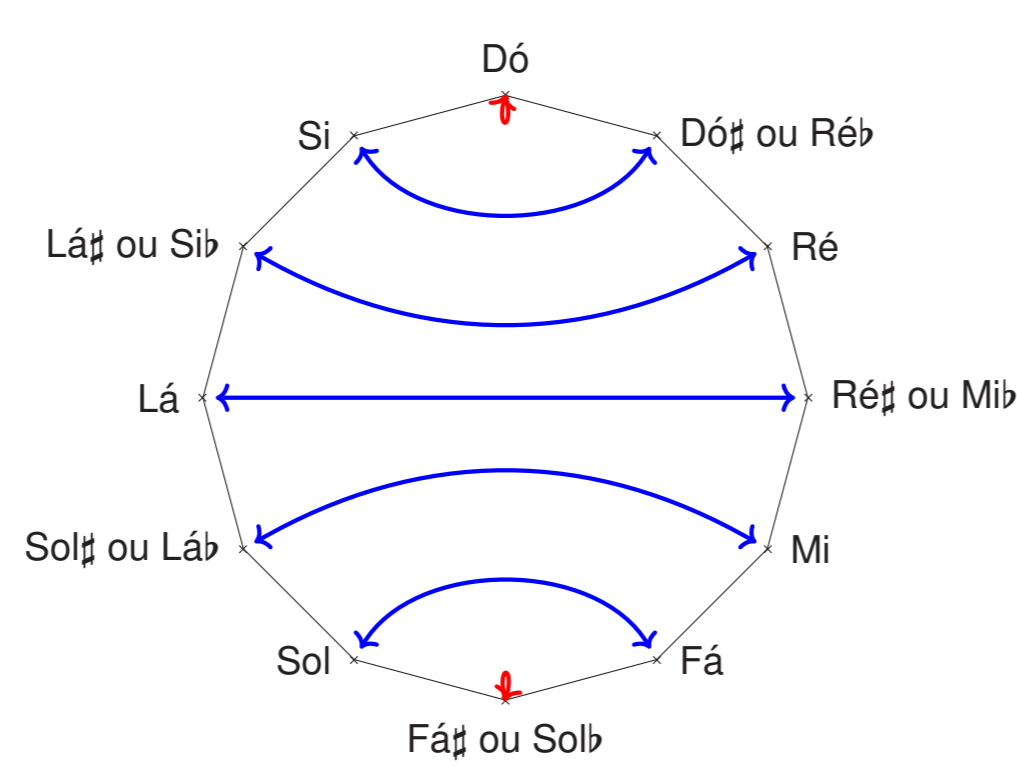


Figura 2: Transformação de “inversão” em Dó

Sendo ações de um grupo, há muitas análises interessantes a se fazer sobre transformações tonais, como suas órbitas, pontos fixos, ordens, e quais as implicações musicais de resultados algébricos.

2 Teoria Neo-Riemanniana e os grupos PLR

Uma forma diferente de visualizar as transformações é através do *tonnetz*, um reticulado triangular criado por Euler e muito usado pelo musicólogo Hugo Riemann no século XIX [3]

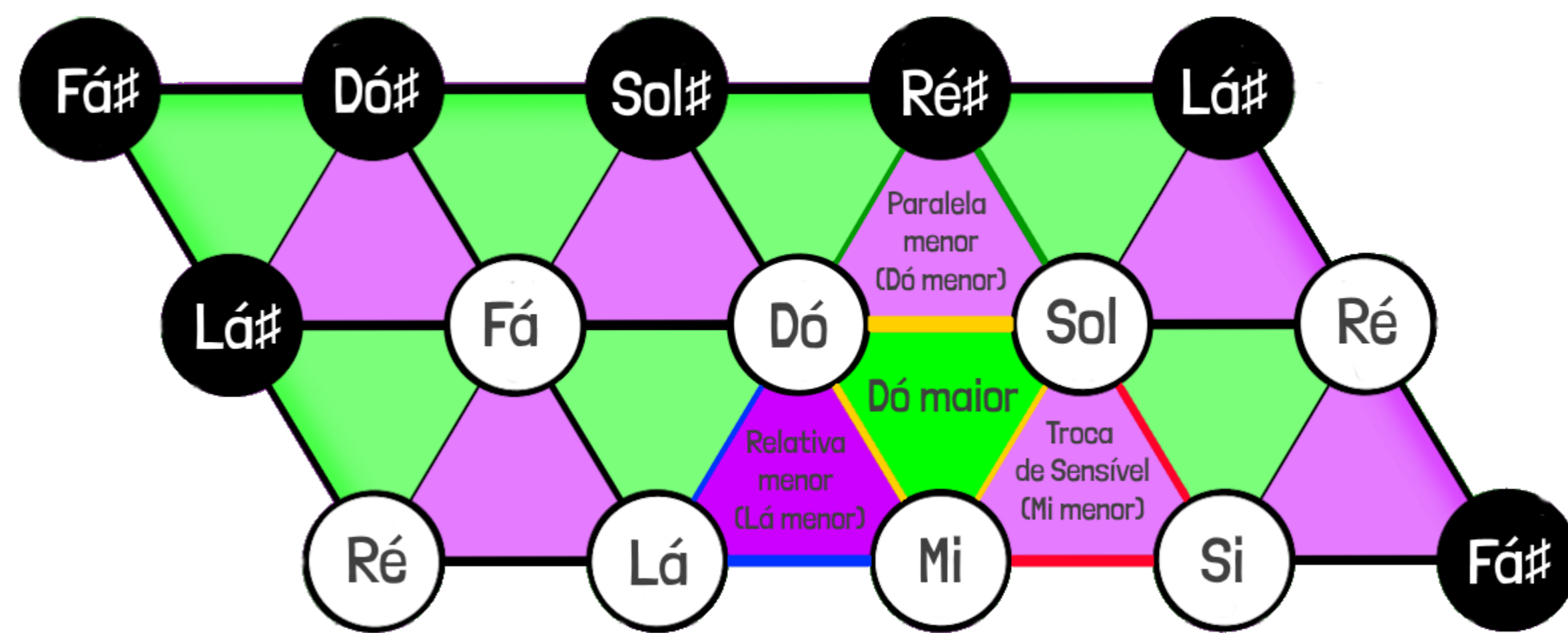


Figura 3: Um tonnetz. Triângulos verdes representam tríades maiores, e rosas tríades menores. Em destaque, a família PLR do Dó maior

Aqui, estamos aplicando transformações sobre tríades: as operações “Paralela” (P), “troca do sensível” (L) e “relativa” (R) são de interesse especial, pois qualquer outra troca de tríades pode ser escrita como composição dessas três.

Já houveram algumas propostas de expandir esse conceito. Por exemplo, uma sugestão de criar uma teoria englobando envolvendo tétrades foi descrita em [2].

3 Futuro e desenvolvimentos recentes

Um desenvolvimento mais recente bem notável é o *modelo espiral* da pianista e matemática Elaine Chew [7]. Esse modelo mistura o *tonnetz* com outros modelos que visualizam os tons como uma espiral. Chew definiu um espaço tonal 3D como

$$P(k) = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin \frac{k\pi}{2} \\ r \cos \frac{k\pi}{2} \\ kh \end{bmatrix}$$

Onde h e r são parâmetros, e k é um inteiro representando a distância do tom desejado ao tom inicial no ciclo de quintas; matematicamente, sendo T_0 o tom inicial da espiral e T o tom desejado numa representação módulo 12, k é o inteiro tal que $T \cong T_0 + 7k \bmod 12$.

O trabalho de Chew expande significativamente o embasamento matemático possível no estudo da teoria musical, tanto como campo de pesquisa teórico quanto prático.

Referências

- [1] LEWIN, DAVID, *Generalized musical intervals and transformations*, Oxford University Press
- [2] CHILDS, ADRIAN P., *Moving beyond Neo-Riemannian Triads: Exploring a Transformational Model for Seventh Chords*, Duke University Press
- [3] COHN, RICHARD, *Introduction to Neo-Riemannian Theory: A Survey and a Historical Perspective*, Journal of Music Theory
- [4] COHN, RICHARD, *Neo-Riemannian Operations, Parsimonious Trichords, and Their “Tonnetz” Representations*, Journal of Music Theory
- [5] CRANS, ALISSA S., FIORE, THOMAS M., & SATYENDRA, RAMON, *Musical actions of dihedral groups*, The American Mathematical Monthly
- [6] LIERN, VICENTE, *On the construction, comparison, and exchangeability of tuning systems*, Journal of Mathematics and Music
- [7] CHEW, ELAINE, *Towards a mathematical model of tonality*, Massachusetts Institute of Technology

Agradecimentos

Agradeço sempre a todos os meus professores, em especial aos profs. drs. Pedro Levit Kaufmann e Grasielle Cristiane Jorge. Também à minha família e amigos, e em especial a Edson Gabriel Mesquita Nakao pela ajuda com as ilustrações.