Estatísticas multiplicativas para os modelos GOE e GSE de matrizes aleatórias

Gabriel Passarelli

ICMC - USP

gabrielpassarelli@usp.br

Resumo e Introdução

Em nosso trabalho, vamos introduzir o tópico de matrizes aleatórias, mostrando como se aborda o estudo das estatísticas de seus autovalores, que são de interesse para a modelagem matemática de diversos fenômenos de caráter randômico, com aplicações em física, teoria dos números, *big data*, e muito mais.

Exploraremos os chamados *ensembles* (modelos) clássicos: o modelo unitário, o modelo ortogonal, e o modelo simplético, cuja origem está atrelada aos trabalhos que deram os pontapés iniciais no estudo de matrizes aleatórias.

Objetivos

Matematicamente, define-se os *ensembles* clássicos como:

- Unitário (UE): matrizes hermitianas $n \times n$ munidas de uma distribuição de probabilidade invariante por conjugação via matrizes unitárias.
- Ortogonal (OE): matrizes simétricas $n \times n$ munidas de uma distribuição de probabilidade invariante por conjugação via matrizes ortogonais.
- Simplético (SE): matrizes hermitianas $2n \times 2n$ que respeitam também
  $$M = JM^TJ^T, \; J := \text{diag}(\sigma, \dots, \sigma) \text{ e } \sigma := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$
  e munidas de uma distribuição de probabilidade invariante por conjugação via matrizes simpléticas, i.e, matrizes unitárias tais que $UJU^T = J$.

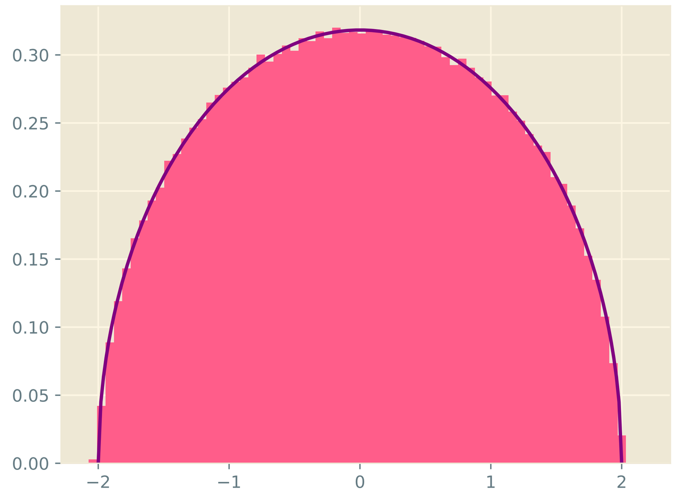

Figura 1: Em vermelho, histograma dos autovalores de 500 matrizes hermitianas (reescaladas pelo fator $1/(2\sqrt{n})$), com entradas sorteadas do conjunto $\{-1, 1\}$. Em roxo, gráfico da densidade da Distribuição do semicírculo de Wigner.

Nos três conjuntos, considera-se uma distribuição de probabilidade da forma
$$P_n(M)\mathrm{d}M = \frac{1}{Z_n}\exp(-\mathrm{Tr}\,Q(M))\mathrm{d}M,$$
com $\mathrm{d}M$, a medida de de Lebesgue nas entradas de M; Q, uma função real estendida a M via cálculo funcional; e Z_n, uma constante chamada às vezes de *função partição*. Se $Q(x) = x^2$, obtemos os chamados *ensembles gaussianos*, denotados por GUE, GOE, e GSE.

Classicamente, o objetivo no estudo de matrizes aleatórias reside na descrição de estatísticas envolvendo seus autovalores. Wigner mostrou, e depois o resultado foi generalizado, que a distribuição dos autovalores de matrizes hermitianas (propriamente reescaladas), com entradas identicamente e independentemente distribuídas, converge para a chamada *Distribuição do Semicírculo de Wigner* quando a dimensão das matrizes cresce, dada por
$$\mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}\mathrm{d}x,$$
tal qual visto na Figura 1.

Resultado

Além desta descrição assintótica para uma configuração particular das matrizes aleatórias, pode-se procurar pelas distribuições dos autovalores de matrizes de dimensão finita, como visto na Figura 2, e este é o objetivo inicial de nosso trabalho. O cômputo destas estatísticas envolve o cálculo de esperanças e, nesse sentido, a primeira tarefa é fazer uma mudança de variáveis, que nos permite reduzir drasticamente as variáveis sobre as quais integramos.

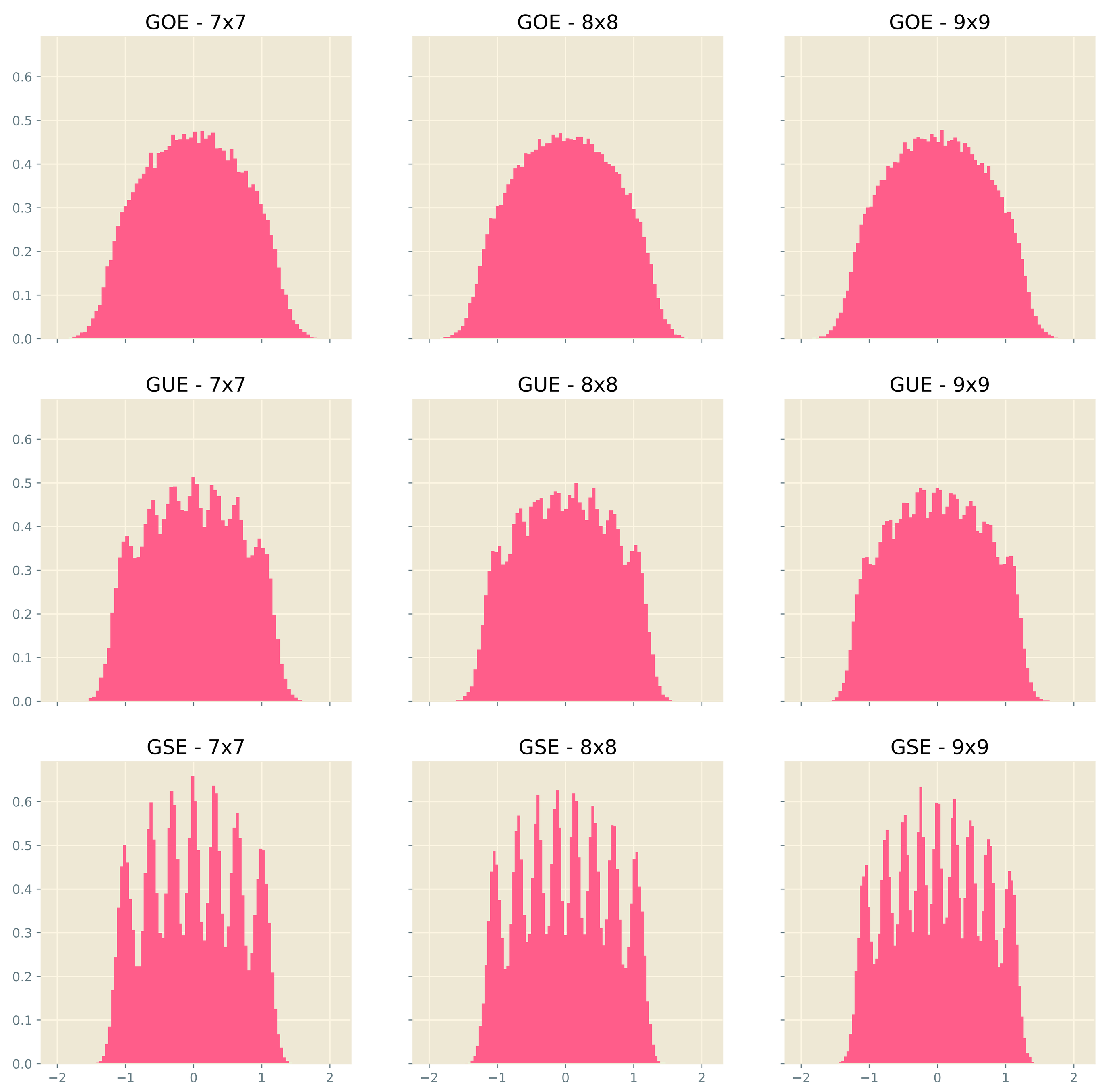

Figura 2: Histogramas dos autovalores de matrizes de cada um dos *ensembles* gaussianos. Observe que a contagem de picos nos *ensembles* unitário e simplético corresponde à dimensão das matrizes.

Teorema 1. *Se $f(M) = F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = F(\lambda)$ só depende dos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de M, e M pertence a algum dos ensembles clássicos, então*
$$\mathbb{E}(f) = \frac{1}{n!Z_n}\int F(\lambda)\exp\left(-\sum Q_\beta(\lambda_i)\right)|V(\lambda)|^\beta \mathrm{d}\lambda,$$
em que $\beta = 1, 2,$ ou 4, dependendo se a integração é feita sobre o ensemble ortogonal, unitário, ou simplético, respectivamente. $V(\lambda)$ denota o Determinante de Vandermonde, e $Q_1(x), Q_2(x) = Q(x)$ e $Q_4(x) = 2Q(x)$.

A primeira etapa da demonstração do Teorema consiste em mostrar que, para propósitos de integração, basta se considerar matrizes de espectro simples (no contexto de matrizes simpléticas, temos condição equivalente, porém adaptada). Em seguida, invocamos o Teorema Espectral e fazemos a mudança de variáveis $M \mapsto (\Lambda, U)$, com $M = U\Lambda U^*$. O problema que se coloca então é calcular o Jacobiano $|\det \frac{\partial M}{\partial(\Lambda, U)}|$. Isto se faz parametrizando apropriadamente o contradomínio da mudança de variáveis, e então utilizando técnicas clássicas no contexto de variedades diferenciáveis.

Conclusão

Ao fim, observa-se a vasta gama de ferramentas matemáticas utilizadas no estudo de matrizes aleatórias, fazendo conexões com Grupos de Lie, polinômios ortogonais, Problemas de Riemann-Hilbert, e muitas outras. Como próximo passo, iremos calcular as chamadas *Gap probabilities*, que quantificam a probabilidade de que os autovalores estejam em um certo subconjunto de Borel da reta, e que são dadas por esperanças de funções características.

Referências

[1] P. Deift e D. Gioev. *Random Matrix Theory: Invariant Ensembles and Universality*. Courant Lecture Notes 18. American Mathematical Society, 2009, pp. IX+217.

[2] Roland Speicher. *Lecture Notes on "Random Matrices"*. 2020. arXiv: 2009.05157 [math.PR].

Agradecimentos

Agredeço à FAPESP pelo financiamento via o projeto número 2023/01566-0.