A ordem média de subgrupos centrais

Gabriel Miranda & Igor Lima

Universidade de Brasília (UnB)

210006561@aluno.unb.br

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Este trabalho é um estudo sobre a ordem média dos elementos de um grupo finito G, denotada por $o(G) = \psi(G)/|G|$, em que $\psi(G)$ é a soma das ordens de todos os elementos de G. Neste trabalho, generalizamos as desigualdades $o(G) \geq o(Z(G))$ e $\alpha(G) \leq \alpha(Z(G))$. Mais especificamente, demonstramos que $o(G) \geq o(H)$ e $\alpha(G) \leq \alpha(H)$, para todo H central em G.

Introdução

A função $\psi(G)$ foi inicialmente estudada por H. Amiri, S. M. Jafarian Amiri e I. Isaacs [2] e a função $o(G)$ por A. Jaikin-Zapirain [1]. No ano de 2018, Martino Garonzi e Igor Lima [3] estudaram a função $\alpha(G) = c(G)/|G|$, em que $c(G)$ denota a quantidade de subgrupos cíclicos de G.

M. Tărnăuceanu [4] provou que $\alpha(G) \leq \alpha(Z(G))$, inspirado na desigualdade $o(G) \geq o(Z(G))$, de A. Jaikin-Zapirain [1], a qual Tărnăuceanu refere-se a uma *"beautiful inequality"*.

Este trabalho possui como objetivo generalizar as desigualdades $o(G) \geq o(Z(G))$ e $\alpha(G) \leq \alpha(Z(G))$. Especificamente, estas generalizações comparam G não apenas com $Z(G)$, mas também para todo $H \leq Z(G)$. As demonstrações serão diferentes das apresentadas por A. Jaikin-Zapirain e M. Tărnăuceanu, em [1] e [4], respectivamente. Além disso, demonstraremos também que G é nilpotente, se e somente se, $\alpha(G) = \alpha(H)$, para $H \leq Z(G)$.

Resultados

Lema 1 *Sejam G um grupo finito abeliano, $H < G$ e $g \in G \setminus H$. Então $|h|$ divide $|gh|$, para todo $h \in H$.*

Demonstração. Se $|h| = 1$, então é óbvio que o Lema vale. Tome $1 \neq h \in H$. Façamos a demonstração sobre indução em $|G|$. Denote $L = mdc(|h|, |gh|)$. Primeiramente, observe que $g \in G \setminus H$, logo $|g| \neq 1$. Assim, $L \neq 1$, pois $|gh| \neq 1$. Então existe um primo p tal que divide L. Seja $N = \Omega_p(G)$. Como p divide L e L divide $|h|$, então p divide $|h|$. Neste caso, existe $h^m \in \langle h \rangle$, para algum $m \in \mathbb{N}$, tal que $|h^m| = p$. Assim, $\langle h \rangle \cap N \neq 1$. Analogamente, temos que $\langle gh \rangle \cap N \neq 1$. Como G é abeliano, segue que $N \lhd G$. Tome $h \in H$ e $hN \in G/N$ elementos arbitrários. Denote $|hN| = k$, ou seja, k é o menor inteiro positivo tal que $h^k \in N$. Provaremos que $k = |h|/p$. Observe que $h^{|h|/p} \in N$. Como k é minimal, $k \leq |h|/p$. Além disso, $|h|$ divide kp, pois $1 = (h^k)^p = h^{kp}$. Assim,

$$|h| \leq kp \leq \frac{|h|}{p} \cdot p = |h|.$$

Portanto, $|hN| = k = |h|/p$. Analogamente, $|ghN| = |gh|/p$. Como $|G/N| < |G|$, segue que $|hN|$ divide $|ghN|$. Portanto, $|h|$ divide $|gh|$. □

Teorema A *Sejam G um grupo finito e H central em G. Então $o(G) \geq o(H)$.*

Demonstração. Podemos escrever

$$G = H \,\dot\cup\, g_1H \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, g_{n-1}H$$

Logo,

$$\psi(G) = \psi(H) + \psi(g_1H) + \ldots + \psi(g_{n-1}H).$$

Assuma $|H| = s$. Como H é central em G, então $T_i = \langle h, g_ih \rangle$ é um grupo abeliano, para $1 \leq i \leq n-1$. Pelo Lema 1, temos que $|h|$ divide $|g_ih|$. Assim, $\psi(g_iH) \geq \psi(H)$. Observe que $|G : H| = n - 1$. Portanto,

$$o(G) \geq \frac{|G : H|\psi(H)}{|G|} = o(H).$$

□

Teorema B Sejam G um grupo finito e H central em G. Então $\alpha(G) \leq \alpha(H)$. A igualdade ocorre se, e somente se, G é nilpotente.

Demonstração. Considere $|G : H| = n$. Tome arbitrariamente $g \in G$ e $h \in H$. Por hipótese, H é central em G, logo $T = \langle h, gh \rangle$ é um grupo abeliano. Pelo Lema 1, temos que $|h|$ divide $|g_ih|$ e $1/\varphi(|h|) \geq 1/\varphi(|g_ih|)$, para $1 \leq i \leq n$. Logo,

$$\begin{aligned} c(G) &= \textstyle\sum_{h \in H} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\varphi(|g_ih|)} \\ &= \textstyle\sum_{h \in H} \left(\frac{1}{\varphi(|g_1h|)} + \ldots + \frac{1}{\varphi(|g_nh|)} \right) \\ &\leq \textstyle\sum_{h \in H} |G : H| \frac{1}{\varphi(|h|)} \\ &= |G : H| c(H), \end{aligned}$$

o que implica que $\alpha(G) \leq \alpha(H)$.

Agora, suponha que $\alpha(G) = \alpha(H)$. Considere $|H| = m$. Provaremos que $\varphi(|h|) = \varphi(|gh|)$, para todos $g \in G$ e $h \in H$. A igualdade $\alpha(G) = \alpha(H)$ é equivalente a $c(G) = |G : H| c(H)$ e, por sua vez, também é equivalente a

$$c(G) = |G : H| \sum_{h \in H} \frac{1}{\varphi(|h|)} \iff$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} \sum_{h \in H} \frac{1}{\varphi(|g_ih|)} = |G : H| \sum_{h \in H} \frac{1}{\varphi(|h|)}.$$

Assim,

$$\sum_{h \in H} \left(\frac{1}{\varphi(|g_1h|)} + \ldots + \frac{1}{\varphi(|g_nh|)} \right) =$$

$$= |G : H| \left(\frac{1}{\varphi(|h_1|)} + \ldots + \frac{1}{\varphi(|h_m|)} \right)$$

Em ambos os lados da igualdade temos $m \cdot n$ parcelas. Daí

$$\frac{1}{\varphi(|g_ih|)} = \frac{1}{\varphi(|h|)},$$

para todo $h \in H$ e $1 \leq i \leq n$. Logo, $\varphi(|h|) = \varphi(|gh|)$.

Em particular, para $h = 1$ e $g \neq 1$, temos $\varphi(1) = \varphi(|g|) = 1$. Logo, $|g| = 2$. Assim, G/H é 2-abeliano elementar. Todos os p-subgrupos de Sylow de G (p ímpar) estão em $H \trianglelefteq Z(G)$, isto é, são centrais Logo, o produto direto destes p-subgrupos de Sylow, denotado por P, tem ordem ímpar e é normal em G. Note que $|G : P|$ e $|P|$ são coprimos, logo existe um complemento K de P em G, com $K \lhd G$. Portanto, $G \cong P \times K$, P é central de ordem ímpar e K é 2-subgrupo de Sylow de G. □

Referências

[1] JAIKIN-ZAPIRAIN, Andrei. **On the number of conjugacy classes of finite nilpotent groups**. Advances in Mathematics, v. 227, n. 3, p. 1129-1143, 2011.

[2] AMIRI, Habib; JAFARIAN AMIRI, S. M.; ISAACS, I. M. **Sums of element orders in finite groups**. Communications in Algebra®, v. 37, n. 9, p. 2978-2980, 2009.

[3] GARONZI, M.; LIMA, I. **On the number of cyclic subgroups of a finite group (2018)**. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, 49, 515-530.

[4] TĂRNĂUCEANU, Marius. **A result on the number of cyclic subgroups of a finite group**. (2020): 93-94.