Uma generalização do Teorema de Poincaré-Bendixson para variedades bidimensionais compactas sem bordo

Gabriel Mesquita & Luciana Salgado

Instituto de Matemática da UFRJ

gabriel@im.ufrj.br

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Introdução

Até meados do séc. XIX, o estudo das equações diferenciais ordinárias (EDOs) direcionava-se a obter suas soluções de forma explícita. Essas soluções descrevem órbitas de pontos no espaço ou, fazendo uma analogia física, trajetórias de "partículas" sujeitas a um "campo de forças" descrito pela equação diferencial. Obter essas soluções se mostrou uma tarefa difícil, sendo frequentemente impossível. Uma mudança de paradigma nesta teoria deu-se com o matemático francês Henri Poincaré, entre o final do século XIX e o início do século XX, com seus trabalhos sobre mecânica celeste. Ao invés de buscar soluções explícitas de uma EDO, Poincaré direcionou seus esforços em conhecer as propriedades qualitativas de suas soluções (por exemplo, se elas eventualmente convergiam, se eram limitadas etc). Um resultado clássico da teoria das equações diferenciais ordinárias é o teorema de Poincaré-Bendixson, servindo de ferramenta poderosa na compreensão de trajetórias em campos de vetores diferenciáveis no plano. De modo simples, o teorema afirma que todo conjunto de pontos de acumulação não vazio e compacto de uma órbita no plano, por uma equação diferencial ordinária, pode ser de somente um dos três tipos a seguir: um ponto fixo, uma órbita periódica ou um conjunto conexo composto de uma quantidade finita de pontos fixos e órbitas homoclínicas e heteroclínicas conectando estes. Neste trabalho, mostraremos uma generalização do Teorema de Poincaré-Bendixson para superfícies compactas bidimensionais sem bordo, provado em 1963 por Arthur Schwartz em seu artigo 'A Generalization of a Poincaré-Bendixson Theorem to Closed Two-Dimensional Manifolds' [1].

Algumas definições e resultados básicos

Definição 1. Um fluxo em uma variedade M é uma função $\phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\phi(0, x) = x$;
2. $\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$.

Dado $p \in M$, definimos $\gamma_p = \{\phi(t, p) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ a trajetória (ou órbita) de p por ϕ.

Alguns exemplos clássicos de fluxos são os definidos por equações diferenciais ordinárias.

Definição 2. Dadas uma variedade M, um ponto $p \in M$ e um fluxo ϕ em M, definimos o **conjunto ω-limite de p** como o conjunto de pontos de acumulação da órbita de p por ϕ e denotamos por $\omega(p)$.

Proposição 1 (Propriedades do ω-limite). *Seja $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um fluxo em $\mathbb{R}^n$. Se $p \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\gamma_p^+ = \{\phi(t, p) \,|\, t \geq 0\} \subset K$ compacto, então:*

- $\omega(p) \neq \varnothing$ *e* $\omega(p) \subset K$;
- $\omega(p)$ *é compacto;*
- $\omega(p)$ *é invariante por* ϕ;
- $\omega(p)$ *é conexo.*

Definição 3. Sejam S uma superfície e ϕ um fluxo em S. Um conjunto não-vazio $M \subset S$ é dito **minimal para** ϕ se:

- M é fechado;
- M é invariante por ϕ, isto é, $\phi_t(M) = M, \forall t \in \mathbb{R}$;
- M não contém subconjuntos próprios fechados e invariantes por ϕ.

Teorema 1 (Poincaré-Bendixson Clássico). *Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $F \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$ um campo de vetores com número finito de singularidades e ϕ_t o fluxo de F. Se $p \in E$ é tal que $\gamma_p^+ \subset K$ compacto, então acontece uma das seguintes possibilidades:*

1. *Se $\omega(p)$ contém somente pontos singulares, então $\omega(p) = \{q\}$, onde q é uma singularidade.*
2. *Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.*
3. *Se $\omega(p)$ contém pontos singulares e regulares, então $\omega(p)$ consiste em um conjunto de órbitas, que tendem a um desses pontos singulares quando $t \to \pm\infty$.*

Teorema principal e aplicação à teoria de Poincaré-Bendixson

Teorema 2 (Schwarz). *Sejam S uma superfície bidimensional compacta e conexa de classe C^2, ϕ um fluxo de classe C^2 em S e $M \subset S$ um conjunto minimal para ϕ. Então M só pode ser de um desses tipos a seguir:*

1. *M é um conjunto unitário com uma singularidade;*
2. *M é uma órbita periódica;*
3. *M tem interior não vazio e, neste caso, $M = S = \mathbb{T}^2$.*

Corolário 1 (Poincaré-Bendixson em 2-variedades). *Sejam M uma variedade bidimensional orientável e ϕ um fluxo em M. Se M não é um conjunto minimal para ϕ e $p \in M$ é tal que $\omega(p)$ não contém singularidades, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.*

Referências

[1] Schwarz, Arthur J.: *A Generalization of a Poincaré-Bendixson Theorem to Closed Two-Dimensional Manifolds*. The Johns Hopkins University Press, 1963.

[2] Matheus G. Figueira, Gilcione N. Costa: *O Teorema de Poincaré-Bendixson em variedades compactas bidimensionais sem bordo*. Tese de Mestrado, Departamento de Matemática, UFMG, 2020.

Agradecimentos

CAPES pelo apoio financeiro