A construção de espaços topológicos via topologia quociente

Gabriel Cassimiro Pereira

Unesp - Câmpus de Rio Claro
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Departamento de Matemática

gabriel.cassimiro@unesp.br

Resumo

Dentre os diversos tipos de contruções de espaços topológicos, destacaremos aqui a Topologia Quociente. Nesta exibição, traremos a sua definição e consequências imediatas que dela acarretam. Finalizaremos com alguns exemplos clássicos e intrigantes.

Esse trabalho é parte do projeto de iniciação científica intitulado "A classificação das superfícies", financiado pela FAPESP (processo 2022/11324-0).

Introdução

Em Topologia, a topologia quociente é um conceito fundamental que nos permite construir novos espaços topológicos a partir da identificação de certos pontos em um espaço topológico dado. Por exemplo, as superfícies compactas podem ser construídas a partir de identificações nas arestas de polígonos.

A topologia quociente encontra aplicações em diversas áreas da matemática tais como na topologia algébrica, na geometria diferencial e na topologia geométrica. Em suma, a topologia quociente é uma ferramenta útil que permite compreender a estrutura e as propriedades dos espaços topológicos através da identificação de pontos equivalentes. Ela também pode nos fornecer uma maneira de analisar as relações e comportamentos de objetos topológicos de maneira intuitiva.

Objetivos

1. Definição de topologia quociente;
2. Consequências imediatas e um resultado universal para a topologia quociente;
3. Definição de topologia de identificação;
4. Exemplos (Faixa de Möbius e Garrafa de Klein)

Conceitos e notações

1. Seja X um conjunto e uma coleção $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X. Dizemos que o par $(X, \mathcal{U})$ é um espaço topológico (e denotamos apenas por X) quando satisfaz às seguintes propriedades:
   - $\emptyset, X \in \mathcal{U}$;
   - Intersecção finita de elementos de $\mathcal{U}$ pertence à $\mathcal{U}$;
   - União arbitrária de elementos de $\mathcal{U}$ ainda pertence à $\mathcal{U}$.

   Nesse caso, cada elemento de $\mathcal{U}$ é dito aberto em X.
2. Sejam X e Y espaços topológicos e $f\colon X \to Y$ uma função. Ela é dita contínua se a imagem inversa de qualquer aberto de Y pela f for aberto em X.
3. Sejam A um conjunto e $\backsim_A$ uma relação de equivalência nele. Qualquer elemento $a \in A$ possui uma classe de equivalência, a qual denotaremos por $[a] \in A/\backsim_A$.

Resultados

Considerando um espaço topológico X, um conjunto Y e uma função sobrejetora $f\colon X \to Y$, então a família

$$\mathcal{U}_f = \{U \subseteq Y\colon f^{-1}(U) \text{ é aberto em } X\}$$

é uma topologia para o conjunto Y, dita topologia quociente com relação à função f. Segue imediatamente da definição de $\mathcal{U}_f$ que f é contínua.

Um resultado muito importante para o estudo de topologia quociente é a Propriedade Universal das Funções Quocientes. Esta propriedade afirma que, dada uma função $f\colon A \to B$ entre um espaço topológico A e um conjunto B com a topologia quociente em relação a f, uma outra função $g\colon B \to C$ entre B e um espaço topológico C é contínua se, e somente se, a composição entre f e g for contínua.

Por fim, dado um espaço topológico X e uma relação de equivalência $\backsim$ nele, a função $f\colon X \to X/\backsim$ dada por $f(x) = [x]$ é sobrejetora. Logo, podemos atribuir ao conjunto das classes de equivalência $X/\backsim$ a topologia quociente com relação à função f. Em particular, esta topologia é dita uma topologia de identificação. Como exemplos temos a construção da Faixa de Möbius e da Garrafa de Klein a partir de um quadrado unitário

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon 0 \leq x, y \leq 1\}$$

com a topologia induzida pela topologia usual do $\mathbb{R}^2$ com as seguintes relações de equivalência (as figuras indicam os pontos e os sentidos em que os identificamos):

1. Constrói-se uma Faixa de Möbius ao tomar X com a relação de equivalência $\backsim$ dada por

$$(x, y) \backsim (x', y') \Leftrightarrow \{x, x'\} = \{0, 1\} \text{ e } y = 1 - y'$$

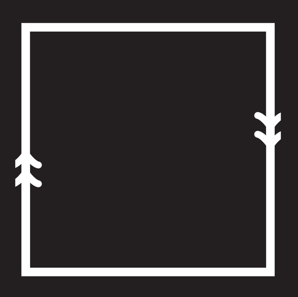

Figura 1: Faixa de Möbius

2. Constrói-se uma Garrafa de Klein ao tomar X com a relação de equivalência $\backsim$ dada por

$$(0, y) \backsim (1, y), (x, 0) \backsim (1 - x, 1).$$

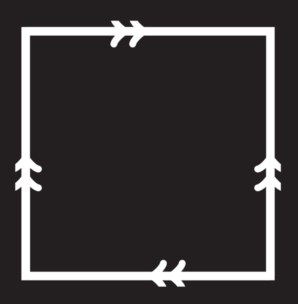

Figura 2: Garrafa de Klein

Conclusão

A topologia quociente é uma ferramenta útil que nos permite obter novos espaços topológicos a partir de espaços dados. Nos permite trabalhar com a topologia de identificação de pontos através de relações de equivalência e, através da Propriedade Universal, torna possível estudar a continuidade de funções sem se utilizar o método usual.

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora pela oportunidade de ser seu pupilo e, portanto, desenvolver este estudo em sua área, à minha família pelo apoio e incentivo e aos meus professores pelos conselhos e encaminhamentos. Agradeço a FAPESP pelo apoio financeiro.

Referências

[1] KOSNIOWSKI, Czes. **A First Course in Algebraic Topology**. New York: Cambridge University Press, 1980. 269 p. ISBN 978-0-521-23195-4.

[2] LOIBEL, Gilberto Francisco. **Introdução à Topologia**. São Paulo: Editora UNESP, 2007. 129 p. ISBN 978-85-7139-795-8.

[3] ARMSTRONG, M. A. **Basic Topology**. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1983. ISBN 978-1-4419-2819-1.

[4] MUNKRES, James R. **Topology**. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, Inc., 2000. 537 p. ISBN 0-13-181629-2.