Modelo Fracionário da equação logística de Verhulst

Fernanda de Andrade Flor & Rafael Antônio Rossato

Universidade Federal de Uberlândia

fernandaflor@ufu.br

Resumo

Neste trabalho estudamos uma abordagem fracionária do modelo logístico de Verhulst. Como resultado observamos que a redução na ordem da derivada implica em soluções de comportamento semelhante ao do problema de ordem inteira igual a um, porém com uma taxa de crescimento menor, apesar de convergirem para a mesma capacidade suporte.

Introdução

Nessa seção apresentamos propriedades relevantes, cujas demonstrações estão disponíveis em [1] e [2].

Definição 1. *Seja $f(t)$ uma função definida em $0 \leq t < \infty$. Definimos a transformada de Laplace de $f(t)$, denotada por $\mathscr{L}[f(t)]$ ou $F(s)$, por*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt,\ s > 0.$$

Teorema 1. *Seja f uma função tal que f e f' são contínuas e de ordem exponencial. Então, $\mathscr{L}[f'(t)]$ existe para $s > a$ e é dada por*

$$\mathscr{L}[f'(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0).$$

Definição 2. *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções de ordem exponencial definidas no intervalo $0 \leq t < \infty$. Definimos o produto de convolução de $f(t)$ e $g(t)$ como*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Proposição 1. *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções de ordem exponencial. Temos*

$$\mathscr{L}[(f * g)(t)] = \mathscr{L}[f(t)] \cdot \mathscr{L}[g(t)].$$

Definição 3. *Dado $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ definimos a função Gamma pela seguinte integral,*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Teorema 2. *Para $n \in \mathbb{N}$, temos $\Gamma(n) = (n-1)!$.*

Logo temos que a função Gamma é uma generalização do fatorial para números reais.

Definição 4. *Dados $\alpha > 0$ e $t > 0$, definimos a Função de Mittag-Leffler de um parâmetro pela seguinte série*

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

A função acima é uma generalização fracionária da função exponencial, uma vez que $E_1(t) = e^t$. A seguinte equação, demonstrada em [2], nos dá a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler utilizada no modelo.

$$\mathscr{L}[E_\alpha(-kt^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k}. \quad (1)$$

Cálculo Fracionário

Neste trabalho consideramos o caso real destas definições, porém tais conceitos podem ser estendidos a ordem complexas (ver [2]).

Denotando por I o operador integral, é possível demonstrar que $I^n f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)d\tau$, utilizando indução sobre n, o que nos sugere uma forma de definir a integral fracionária.

Definição 5. *Seja $f(t)$ uma função integrável. A integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\nu > 0$ de $f(t)$ denotada por $I^\nu f(t)$ é definida como sendo:*

$$I^\nu f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} f(\tau)d\tau.$$

Definimos que $I^0 f(t) = f(t)$.

Definição 6. *Sejam $\beta > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que, $n - 1 < \beta \leq n$. A derivada de ordem β de $f(x)$, com $x > 0$, denotada por $D^\beta f(x)$, é definida como*

$$D^\beta f(x) = I^{n-\beta}[D^n f(x)]$$

Se $\beta = n$, então $D^\beta[f(x)] = I^{n-\beta}[D^n f(x)] = D^n f(x)$.

Teorema 3. *Sejam $\beta > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que, $n - 1 < \beta \leq n$. Então $\mathscr{L}[D^\beta f(t)] = s^{\beta-n}\mathscr{L}[D^n f(t)]$.*

Modelo logístico de Verhulst

O modelo logístico foi proposto por Verhulst em 1838 e possui a equação

$$\frac{d}{dt}v(t) = k\left(\frac{1}{r} - v(t)\right),$$

onde k é a taxa de crescimento, r é a capacidade suporte, $N(t) = v^{-1}(t)$ representa o número de indivíduos. Consideremos sua versão fracionária dada pela equação

$$D^\alpha v(t) = k\left(\frac{1}{r} - v(t)\right), \quad (2)$$

com $\alpha \in (0, 1]$. Aplicando a transformada de Laplace, usando a sua linearidade, os Teoremas 3 e 1,

$$\mathscr{L}[D^\alpha v(t)] = \frac{k}{r}\mathscr{L}[1] - k\mathscr{L}[v(t)]$$

$$s^{\alpha-1}[sF(s) - v(0)] = k\left[\frac{1}{rs} - F(s)\right],$$

denotando $\mathscr{L}[v(t)] = F(s)$. Logo

$$F(s) = \frac{1}{r}\left[\frac{ks^{-1}}{s^\alpha + k}\right] + v(0)\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k}\right]$$

Uma vez que $k\frac{s^{-1}}{s^\alpha + k} = \frac{1}{s} - \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k}$, temos

$$F(s) = \frac{1}{rs} + \left(v(0) - \frac{1}{r}\right)\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k}\right].$$

Logo, segue da Equação (1) que a solução da equação diferencial fracionária (2), é

$$v(t) = \frac{1}{r} + \left[v(0) - \frac{1}{r}\right] E_\alpha(-kt^\alpha).$$

Portanto a equação do número de indivíduos em função do tempo é

$$N(t) = \frac{1}{\frac{1}{r} + \left[v(0) - \frac{1}{r}\right] E_\alpha(-kt^\alpha)}.$$

Temos que a solução de ordem inteira é um caso particular da solução do modelo fracionário. De fato, observe que

$$\lim_{\alpha \to 1} N(t) = \frac{1}{\frac{1}{r} + \left[v(0) - \frac{1}{r}\right] e^{-kt}},$$

uma vez que a função de Mittag-Leffler é uma generalização da função exponencial.

Na Figura 1, esboçamos alguns gráficos de $N(t)$ para diferentes valores da ordem α.

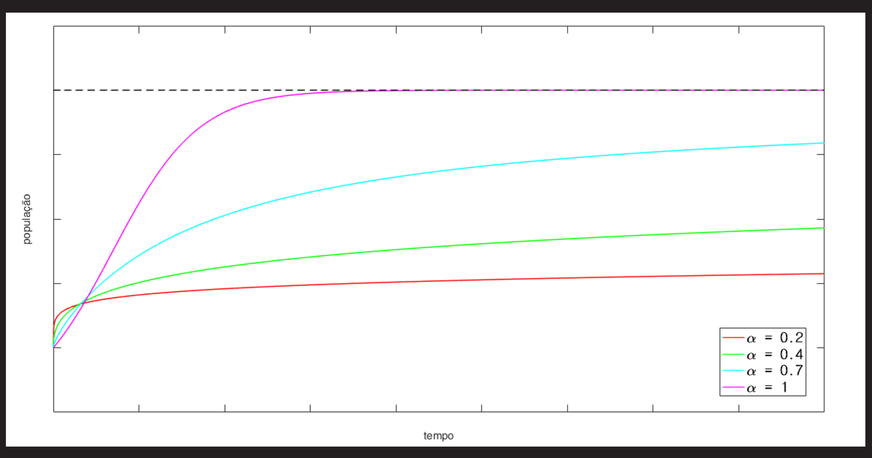

Figura 1: Gráficos da solução do modelo fracionário para difentes valores da ordem α

Fonte: Elaboração própria.

Resultados

Como $\lim_{t\to\infty} E_\alpha(-kt^\alpha) = 0$ para todos os valores de $0 < \alpha \leq 1$, temos que

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = r,$$

ou seja, para qualquer valor de $0 < \alpha \leq 1$, todas as soluções convergem para o valor suporte r.

Conclusão

No modelo fracionário nas condições descritas acima, obtemos soluções que decrescem mais lentamente que no modelo clássico, sugerindo um decrescimento na taxa de variação. Além disso, como no modelo clássico, todas as soluções fracionárias com $0 < \alpha \leq 1$ convergem para o valor suporte r. Tais resultados contribuem para o estudo do cálculo fracionário, uma vez que não há na literatura significados físicos ou geométricos acerca da derivada fracionária.

Referências

[1] William E. Boyce, Richard C. DiPrima, and Valéria M. Iório. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. LTC, Rio de Janeiro, 2010.

[2] Najla Varalta. *Das transformadas integrais ao cálculo fracionário aplicado à equação logística*, 2014.