Equações diferenciais do tipo neutro com retardo dependendo do estado

Felipe Gonçalves Netto & Jaqueline Godoy Mesquita

Universidade de Brasília

felipegoncalvesnetto@gmail.com

Introdução

Vários fenômenos são modelados por equações diferenciais. Alguns desses fenômenos necessitam das chamadas equações diferencias com retardo, no qual aparece um atraso no tempo, representando o tempo decorrido entre causa e efeito.

Neste pôster vamos tratar da seguinte equação

$$\dot{x}(t) = g(\dot{x}_t, x_t), \tag{1}$$

onde $g\colon W \to \mathbb{R}^n$, $W \subset C \times C^1$ é aberto e os espaços C e C^1 são, respectivamente, das funções contínuas e continuamente diferenciáveis de $[-h, 0]$ em $\mathbb{R}^n$. Consideramos que estes espaços estão munidos, respectivamente, com as seguintes normas:

$$\|\phi\| = \max_{-h\leqslant u\leqslant 0} |\phi(u)| \text{ e } \|\psi\|_1 = \|\psi\| + \|\dot{\psi}\|$$

para $\phi \in C$ e $\psi \in C^1$. Além disso, precisamos também do espaço C^2 das funções duas vezes continuamente diferenciáveis, munido com a norma $\|\xi\|_2 = \|\xi\| + \|\dot{\xi}\|_1$. O segmento $x_t\colon [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$ é dado por

$$x_t(s) = x(s + t).$$

Definimos a constante de Lipschitz de uma função $\psi\colon [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$ por

$$Lip(\psi) = \sup_{\substack{x\neq y \\ x,y\in[-h,0]}} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|}.$$

Para o caso particular em que g é dada por

$$g(\psi, \phi) = a\psi(d(\psi(0))) + f(\phi(0)),$$

onde $d\colon \mathbb{R} \to (-h, 0)$ e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a equação (1) pode ser reescrita como

$$\dot{x}(t) = a\dot{x}(t + d(x(t))) + f(x(t)). \tag{2}$$

Esta equação é estudada por Walther em [3] a partir da equação (1). O termo $d(x(t))$ que aparece na equação (2) é chamado de retardo, e como ele depende de $x(t)$, dizemos que o retardo depende do estado. Além disso, como tal retardo aparece no argumento de $\dot{x}$ (derivada temporal), tal equação é dita do tipo neutro.

Hipóteses

(g0) g é contínua;

(g1) Para todo $(\phi, \psi) \in W$, existem $\Delta \in (0, h)$ e uma vizinhança $N \subset W$ de (ϕ, ψ) em $C \times C^1$ tais que, para todos $(\phi_1, \chi), (\phi_2, \chi) \in N$ com

$$\phi_1(t) = \phi_2(t), \forall t \in [-h, -\Delta],$$

temos

$$g(\phi_1, \chi) = g(\phi_2, \chi).$$

(g2) Para todo $\phi \in U_1 \subset C^1$, existem $L \geqslant 0$ e uma vizinhança $N \subset W$ de $(\dot{\phi}, \phi)$ em $C \times C^1$ tais que, para todos $(\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2) \in N$, temos

$$|g(\phi_2, \psi_2) - g(\phi_1, \psi_1)| \leqslant L(\|\phi_2 - \phi_1\| + (Lip(\phi_2) + 1)\|\psi_2 - \psi_1\|).$$

(g3) A restrição g_1 de g no aberto $W_1 = W \cap (C^1 \times C^1)$ do espaço $C^1 \times C^1$ é continuamente diferenciável, toda derivada $Dg_1(\phi, \psi)\colon C^1 \times C^1 \to \mathbb{R}^n$, para $(\phi, \psi) \in W_1$, tem uma extensão linear

$$D_e g_1(\phi, \psi)\colon C \times C \to \mathbb{R}^n,$$

e a aplicação

$$W_1 \times C \times C \ni (\phi, \psi, \chi, \rho) \mapsto D_e g_1(\phi, \psi)(\chi, \rho) \in \mathbb{R}^n$$

é contínua.

Além dessas hipóteses, também temos as hipóteses **(g6), (g8), g(9), (H1)** e **(H2)** que serão importantes para o resultado de estabilidade linearizada (Teorema 2). Elas podem ser encontradas em [1], [2] e [3].

Resultados

Considere os conjuntos

$$X_1 = \{\psi \in C^1 : (\dot{\psi}, \psi) \in W \text{ e } \dot{\psi}(0) = g(\dot{\psi}, \psi)\}$$

e

$$X_{1+} = \{\psi \in X_1 : Lip(\psi) < \infty\}.$$

Desta maneira, usando as hipóteses **(g1)**-**(g2)**, o PVI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(\dot{x}_t, x_t), \\ x_0 = \psi \in X_{1+}. \end{cases} \tag{3}$$

possui existência e unicidade local de soluções. Assim sendo, conseguimos tomar soluções maximais para cada $\psi \in X_{1+}$. Para cada $\psi \in X_{1+}$, seja $x^\psi\colon [-h, t_\psi) \to \mathbb{R}^n$ a solução maximal de (3). Considere o conjunto

$$\Omega_1 = \bigcup_{\psi\in X_{1+}} [0, t_\psi) \times \{\psi\}.$$

Definimos o semifluxo $G_1\colon \Omega_1 \to X_{1+}$ por $G_1(t, \psi) = x_t^\psi$. Dessa maneira, $\{0\} \times X_{1+} \subset \Omega_1$ e, para todo $\psi \in X_{1+}$, $G_1(0, \psi) = x_0^\psi = \psi$. Além disso, para $0 \leqslant t < t_\psi$ e $0 \leqslant s < t_{G_1(t,\psi)}$, temos que $0 \leqslant t + s < t_\psi$ e

$$G_1(t + s, \psi) = G_1(s, G_1(t, \psi)). \tag{4}$$

Seja $X_2 = X_1 \cap C^2$ e $X_{2*} = \{\psi \in X_2 : \dot{\psi} \in T_{e,\psi}X_2\}$, onde $T_{e,\psi}X_2$ é o plano tangente estendido (veja [3]). De forma análoga, definimos o semifluxo $G_2\colon \Omega_2 \to X_{2*}$ no conjunto

$$\Omega_2 = \{(t, \psi) \in [0, \infty) \times X_{2*} : t < t_\psi\} \subset \Omega_1.$$

Dessa maneira temos o seguintes resultados:

Teorema 1 (Continuidade do semifluxo)**.** Admitindo que valem **(g0)-g(3)** temos que os semifluxos G_1 e G_2 são contínuos.

Teorema 2 (Estabilidade Linearizada)**.** Suponha que $g\colon W \subset C \times C^1 \to \mathbb{R}^n$, $W \subset C \times C^1$ aberto, satisfaz **(g0)-(g3), (g6), (g8), g(9), (H1)** e **(H2)**. Então:

1. (Estabilidade) Para todo $\rho > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $\psi \in X_{2*}$ com $\|\psi\|_2 < \delta$, temos $t_\psi = \infty$ e
$$\|G_2(t, \psi)\|_2 < \rho,$$
para todo $t \geqslant 0$.
2. (Estabilidade assintótica) Existe $\delta_a > 0$ tal que, para todo $\psi \in X_{2*}$ com $\|\psi\|_2 < \delta_a$, temos $t_\psi = \infty$ e
$$\lim_{t\to\infty} \|G_2(t, \psi)\|_2 = 0.$$

Referências

[1] F. G. Netto, Equações diferenciais do tipo neutro com retardo dependendo do estado e aplicações. 2022. 96 f., il. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade de Brasília, Brasília, 2022.

[2] H. O. Walther, More on Linearized Stability for Neutral Equations with State-Dependent Delays, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 19 (2011), 315-333.

[3] H. O. Walther, Semiflows for neutral equations with state-dependent delays, *Infinite dimensional dynamical systems*, Springer, New York, (2013), 211-267.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq pelo financiamento durante a elaboração deste trabalho.