Introdução ao cálculo das variações

Felipe Augusto de Araujo & Jamielli Tomaz Pereira

Instituto Federal de São Paulo - Campus Cubatão, Brasil

augusto.araujo@aluno.ifsp.edu.br, jamielli.pereira@ifsp.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo
Campus Cubatão

Resumo

O problema de cálculo das variações faz parte da área da otimização, ele consiste em encontrar a curva que minimiza ou maximiza um funcional. Neste trabalho será estudado um dos problemas clássicos do cálculo das variações, o Problema da Braquistócrona, que será interpretado, modelado e resolvido. Ele está interessado em encontrar a curva que uma partícula deve percorrer para ir de um ponto a outro em um plano vertical no menor tempo sob ação da gravidade. A solução para este problema é encontrada através da condição necessária de otimalidade dada pela Equação de Euler-Lagrange que também será explorada neste trabalho.

Introdução

O problema de cálculo das variações faz parte da área da otimização, ele consiste em encontrar a curva que minimiza ou maximiza um funcional. Neste trabalho, será estudado um dos problemas clássicos do cálculo das variações, o problema da braquistócrona que está interessado em encontrar a curva que uma partícula deve percorrer para ir de um ponto a outro em um plano vertical no menor tempo sob ação da gravidade.

Objetivos

1. Estudar o problema da baquistócrona;
2. Estudar conceitos e resultados do cálculo das variações.

Resultados

O problema do cálculo variacional:

O problema principal do cálculo variacional, pode ser explicado da seguinte maneira: desejamos encontrar uma função $y(x)$ que possui valores fixos nos pontos $x = x_1$ e $x = x_2$, tal que a integral de linha (integral calculada ao longo da curva) de uma dada função $f(x, y, y')$, é tal que, $I = \int_a^b f(x, y, y')dx$, seja um extremo, que é um ponto no domínio de uma função onde a primeira derivada é nula.

Equação de Euler-Lagrange:

Considere a seguinte equação: $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'}) = 0$

Essa equação é o que chamamos de equação de Euler-Lagrange, é a condição necessária de otimalidade no cálculo das variações.

Essa equação é fundamental no cálculo das variações, pois fornece uma condição necessária para encontrar as funções extremo. Ao resolver a Equação de Euler-Lagrange, podemos obter a função que otimiza o funcional sujeito a certas condições de contorno.

O Problema da Braquistócrona:

Sejam A e B dois pontos dados em um plano vertical. O Problema da Braquistócrona consiste em encontrar a curva que uma partícula M precisa descrever para sair de A e chegar em B no menor tempo possível, somente sob a ação da força da gravidade.

Sendo assim, queremos descobrir qual a trajetória para o menor tempo. Com condições iniciais, partícula sai do repouso e da origem; $U_i = 0J$; $E_i = K + U = 0J$.

Logo, temos que a velocidade ao longo da curva é dada por: $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v} \Rightarrow dt = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{v}$.

Além disso, a partícula sai do repouso, o atrito está sendo desprezado e pela conservação de energia mecânica podemos afirmar que as energias mecânicas em duas posições distintas são iguais, assim temos pela conservação de energia mecânica que a energia mecânica final também será 0.

Além disso, em (x_f, y_f); $K_f = \frac{mv^2}{2}$; $U_f = -mgy$, pois y é orientado para baixo, visto que a energia potencial está diminuindo ao longo da trajetória (ela era 0 e depois vai para abaixo de 0). Logo, $E_f = E_i = 0 \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - mgy = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$.

Como queremos o tempo (será a integral de dt), temos:

$$t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} dx.$$

Portanto, queremos descobrir a função y em função de x que torna essa integral a menor possível.

A partir disso podemos perceber que a função acima, função de Lagrange, não depende explicitamente da variável x, assim é possível deduzir para a Equação de Euler a seguinte identidade, $F - y'\frac{\partial}{\partial y'}F = C$, onde C é uma constante. Essa identidade pode ser verificada ao multiplicar a Equação de Euler-Lagrange por y' e fazer algumas manipulações algébricas.

Aplicando essa identidade a nossa função de Lagrange, temos: $\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y^2}{\sqrt{y(1+(y')^2)}} = C_1 \Rightarrow y(1+(y')^2) = C_2$.

Para resolver esta equação diferencial, introduziremos um parâmetro t e considerando $y'(x(t)) = cotg(t)$. Fazendo algumas substituições trigonométricas, obtemos $y = \frac{C_2}{2}(1 - cos(2t))$ e $x(t) = \frac{C_2}{2}(2t - sen(2t)) + C_3$. Fazendo $2t = t_1$ e sendo $C_3 = 0$, visto que $x(0) = 0$, obtemos:

$$y = \frac{C_2}{2}(1 - cos(t_1)) \text{ e } x = \frac{C_2}{2}(t_1 - sen(t_1)).$$

Sendo essas as equações paramétricas da curva chamada ciclóide, onde essa é a solução do problema da Braquistócrona. Abaixo podemos ver a comparação da cicloíde com outras curvas:

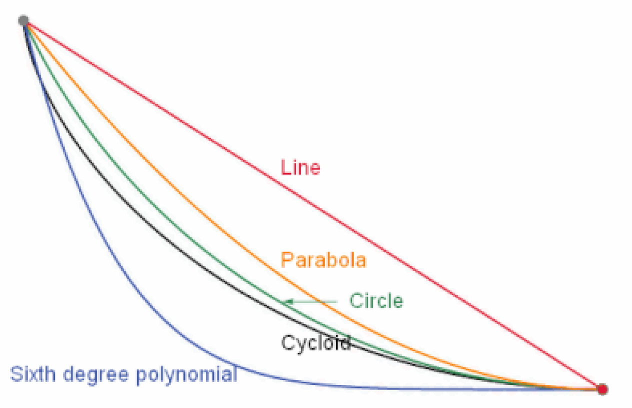

Figura 1: Comparação das curvas

Conclusão

Neste trabalho, definimos o problema do cálculo variacional e a Equação de Euler-Lagrange, buscando resolver o problema da Braquistócrona. Onde mostramos a utilização da condição necessária de otimalidade para a resolução de um problema clássico do cálculo variacional.

Referências

[1] Caroline Aparecida de Lara Campos. Algumas aplicações de cálculo variacional: de braquistócrona a desigual-dade de hardy-sobolev. Master's thesis, Unicamp, 2017.

[2] Gabriel Loureiro de Lima. Cálculo variacional: problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos. Master's thesis, Unicamp, 2004.

[3] Matheus Henry. Curva braquistócrona. Disponível em: http://www.lem.xpg.com.br/Cicloide/cicloide.htm Acesso em 12 de julho de 2023, 2017.

[4] Antonio Leitao Leitao. Cálculo variacional e controle ótimo. *23 ° Colóquio Brasileiro de Matemática*, 2001.

[5] Daniel Liberzon. *Calculus of variations and optimal control theory: a concise introduction*. Princeton university press, 2011.

Agradecimentos

Agradecemos à comissão organizadora do Colóquio pela oportunidade de apresentação deste trabalho e auxílio financeiro, ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica do IFSP, que financia este trabalho, e ao IFSP por todo apoio que dá para o desenvolvimento de trabalhos científicos.