Cutoff de perfil para o processo de exclusão simples no grafo completo

Éric Santana Oliveira

Universidade Federal do Espírito Santo

ericsantana80tc@gmail.com

Resumo

Estamos interessados em estudar o comportamento dos tempos de mistura do processo de exclusão simples no grafo completo. Em [1] é obtido tempo de mistura, e mostrado que por volta desse tempo, para qualquer $\varepsilon \in (0,1)$, a distância de variação total decresce de $1-\varepsilon$ até ε em uma janela temporal de largura da ordem de n. Em parceria com Milton Jara e Fábio Júlio Valentim consideramos o modelo estudado no artigo supracitado, concluimos que sob certas condições no comportamento assintótico do número de partículas em relação a quantidade de sítios do grafo completo, é observado um fenômeno conhecido como cutoff de perfil. Tal resultado fornece um maior entendimento do comportamento assintótico do processo considerado..

Preliminares

Dado $n \in \mathbb{N}$, sejam $\Lambda_n = \{1, ..., n\}$ e $\Omega_n := \{0,1\}^{\Lambda_n}$. Para $f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$, defina $L_n f : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$L_n f(\sigma) := \frac{1}{n} \sum_{x,y \in \Lambda_n} (f(\sigma^{x,y}) - f(\sigma))$$

onde $\sigma^{x,y}$ é obtida trocando os valores nos sítios x e y de σ.
A cadeia de Markov de tempo contínuo $(\sigma(t); t \geq 0)$ com estado de espaços Ω_n e gerada por L_n é chamada de processo de exclusão simples no grafo completo de n vértices.

Da definição podemos ver que o número de partículas do sistema se mantém constante, e portanto a cadeia não é irredutível em Ω_n. Por conta disso, se torna interessante estudar a cadeia em um dos espaços $\Omega_{n,k} := \{\sigma \in \Omega_n; \sum \sigma_x = k\}$.
Dado que $(\sigma(t))$ iniciou em $\bar{\sigma} \in \Omega_{n,k}$, é facilmente verificado que $(\sigma(t))$ é reversível com respeito à $\text{unif}(\Omega_{n,k})$, e portanto esta é a sua medida estacionária.

Dada uma sequência $(X_t^n; t \geq 0)_{n \in \mathbb{N}}$ de cadeias de Markov apresentando cutoff com janela de tamanho $O(w_n)$, com tempos de mistura t_n (respectivamente), dizemos que a sequência apresenta cutoff de perfil G ($G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$) se para qualquer b vale $\lim d_n(t_n + bw_n) = G(b)$, onde $d_n(s)$ é a distância de variação total entre a distribuição de X_s^n e a medida invariante da cadeia (X_t^n).

A princípio, o resultado obtido em [1] é válido para cadeias em tempo discreto, porém podemos obter o resultado para cadeias em tempo contínuo via Poissonização. No caso, vale notar que a janela passa a ser da ordem de 1, o tempo de mistura da ordem de $\log k_n$.

Dada uma cadeia $(\sigma(t))$ iniciada em $\bar{\sigma} \in \Omega_{n,k}$, σ usaremos $d_{n,k}(t)$ para denotar

$$d_{TV}(\mathbb{P}^{\bar{\sigma}}(\sigma(t) = \cdot), \text{unif}(\Omega_{n,k})).$$

Objetivo

Obter o seguinte resultado:
Se $(k_n : n \in \mathbb{N})$ uma sequência de inteiros positivos tal que $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} k_n^2 n^{-1} = 0$ e $2k_n \leq n$ para todo n, então existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d_{n,k_n}(\log k_n + \gamma + t) = \mathbb{P}(\mathbf{T} > t)$$

onde

$$\mathbf{T} := \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\xi_x - 1}{x}$$

e $(\xi_x : x \in \mathbb{N})$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com lei $\text{Exp}(1)$.

Obtenção do Resultado

Em [1] é observado que é possível reduzir o cálculo de $d_{n,k_n}(t)$ a calcular a distância de uma cadeia mais simples à sua medida invariante. Dado $\bar{\sigma} \in \Omega_{n,k_n}$ considere $A_n := \{x \in \Lambda_n; \bar{\sigma}_x = 1\}$.
OBS.: Os objetos definidos daqui em diante dependem de n, porém para deixar a notação menos carregada, omitiremos essa dependência nas notações.
Seja $(W_t; t \geq 0)$ a cadeia dada por

$$W_t := \sum_{x \in A_n}$$

cujo gerador $\mathbb{L}_n$ é dado por

$$\mathbb{L}_n f(x) = \frac{(k-x)^2}{n}(f(x+1) - f(x)) + \frac{x(n-2k+x)}{n}(f(x-1) - f(x)).$$

Note que a a medida invariante da cadeia (W_t) é

$$\nu_{n,k_n}(x) := \frac{\binom{k}{x}\binom{n-k}{k-x}}{\binom{n}{k}}$$

É possível ver que dado que $W_t = x$ a lei de $\sigma(t)$ é uniforme no conjunto das configurações com x partículas em A. Portanto

$$d_{n,k}(t) = d_{TV}(\mathbb{P}^{\bar{\sigma}}(W_t = \cdot), \nu_{n,k}(\cdot))$$

Assim, para obter o resultado, analisaremos a convergência de W_t para $\nu_{n,k}$.
Para cada $x \in \{0, 1, ..., k_n\}$, seja

$$H_x = \inf\{t \geq 0; W_t = x\}.$$

Lema 1. $\mathbb{E}[W_t] = ke^{-t} + \frac{k^2}{n}(1 - e^{-t})$

Utilizando o lema acima, uma análise de $\mathbb{E}[W_\infty]$, e acoplando de maneira independente duas cadeias geradas por $\mathbb{L}_n$, obtemos as relações

$$|d_{n,k}(t) - d_{TV}(Lei(W_t, \delta_0)| \leq d_{TV}(\nu_{n,k}, \delta_0) \leq k^2 n^{-1} \quad \text{e}$$
$$\mathbb{P}(H_0 > t) \leq d_{TV}(Lei(W_t), \delta_0) \leq \mathbb{P}(H_0 > t) + k^2 n^{-1}.$$

Portanto, conseguimos reduzir o problema a analisar o perfil assintótico de $d_{TV}(Lei(W_t), \delta_0)$, que por sua vez pode ser reduzido a analisar o perfil assintótico de $\mathbb{P}(H_0 > t)$.
Assim, o próximo passo é interpretar H_0 como soma de variáveis mais simples:
Para cada $x \in \{1, ..., k_n\}$, defina

$$H_{x,x-1} = H_{x-1} - H_x.$$

Note que H_0 é a soma das variáveis (independentes) acima. As variáveis $H_{x,x-1}$ podem ser interpretadas como as "descidas unitárias"enquanto H_0 é a descida de k até o 0.

Definindo para cada $x \in \{1, ..., k_n\}$

$$S_x := H_{x,x-1} - \frac{\xi_x}{\lambda_x},$$

onde λ_x é a soma das taxas na definição de $\mathbb{L}_n$ e $(\xi_x; x \in \mathbb{N})$ é uma sequência de variáveis i.i.d. com lei $\text{Exp}(1)$, provamos o seguinte lema.

Lema 2. $\mathbb{E}[S_x] \leq \frac{4k^2}{nx^2}$

Através de uma espécie de desigualdade triangular no valor esperado, utilizando o lema acima, concluímos que

$$\mathbb{E}\left[\left|H_0 - \sum_{x=1}^{k} \frac{\xi_x}{x}\right|\right] \leq \frac{32k^2}{3n}$$

E como estamos interessados no perfil assintótico, basta estudar o limite de $\sum_{x=1}^{k} \frac{\xi_x}{x}$. Assim, utilizando o

Lema 3. *Existe* $\gamma \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\left|\sum_{x=1}^{k} \frac{1}{x} - \log(k) - \gamma\right| \leq \frac{3}{2k}$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

segue do teorema das duas séries de Kolmogorov que

$$\zeta := \lim_{k\to\infty} \sum_{x=1}^{k} \frac{\xi_x - 1}{x}$$

é uma variável aleatória (bem definida) com variância limitada.

Usando o lema acima concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sum_{x=1}^{k} \frac{\xi_x}{x} - \log k - \gamma\right) = \zeta$$

e como consequência, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(H_0 > \log k_n + \gamma + t) = \mathbb{P}(\zeta > t),$$

o que garante o resultado desejado.

Considerações finais

Concluímos que de fato o processo de exclusão simples no grafo completo apresenta cutoff de perfil $\mathbf{T}$, o que nos permite analisar de maneira precisa o comportamento assintótico do processo.
O conteúdo apresentado diz respeito ao Cutoff de perfil para o caso (a) de [1]. No momento estamos trabalhando no caso (b).

Referências

[1] H. Lacoin and R. Leblond. Cutoff phenomenon for the simple exclusion process on the complete graph. *ALEA*, VIII:285–301, 2011.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao prof. Fábio Júlio Valentim pela orientação durante o estudo, ao prof. Milton Jara por ter esclarecido dúvidas, e à FAPES pelo apoio financeiro.