Coincidências em Números Piramidais

Ennyo Vinícios & Jean Lelis
Universidade Federal do Pará
ennyo.vinicios@gmail.com & jeanlelis@ufpa.br

Introdução

Dizemos que um número inteiro positivo é um **Número m−Piramidal** quando figuralmente ele representa uma disposição de pontos os quais formam uma pirâmide com base um polígono regular de m lados. Denotamos um número piramidal de parâmetros inteiros $m \geq 3$ e $x \geq 3$ por $Pyr_m(x)$, e dado pela fórmula

$$Pyr_m(x) = \frac{x(x+1)((m-2)x+5-m)}{6}. \qquad (1)$$

As propriedades aritméticas e diofantinas de um número piramidal têm sido amplamente estudadas ao longo dos anos, especialmente após a década de 1980, devido aos estudos sobre Curvas Elípticas, que, a partir dessa década, teve um amplo desenvolvimento.
Neste poster, nos baseamos nos resultados obtidos por Tünde Kovács e Zsolt Rábai no artigo *Equal Values os Pyramidal Numbers*, de 2018, sobre o estudo de soluções da equação diofantina dada pela igualdade entre dois números piramidais de parâmetros diferentes e uma equivalência birracional entre ela e a equação de uma Curva Elíptica dada na forma de Weierstrass e como encontrar as soluções inteiras de tais equações. Para o cálculo dessas soluções inteiras utilizamo o chamado Algoritmo de Gebel-Pethö-Zimmer que permite encontrar todos os pontos inteiros de uma Curva Elíptica mediante estimativas por Logaritmos Elípticos, sendo esse método estudado na Dissertação de Mestrado do autor deste trabalho, [4].

Igualdade entre Números Piramidais

Dados inteiros positivos $m, n \geq 3$, com $m \neq n$, vamos analisar a equação formada pela igualdade

$$Pyr_m(u) = Pyr_n(v) \qquad (2)$$

para inteiros u e v, com $u, v \geq 3$.

Representação em figuras da coincidência em Números Piramidais

Na figura a seguir, representamos a igualdade entre os números piramidais $Pyr_8(3)$ e $Pyr_4(4)$. Pela equação (1), calculamos que $Pyr_8(3) = 30 = Pyr_4(4)$ e nas figuras abaixo podemos contar os 30 pontos.

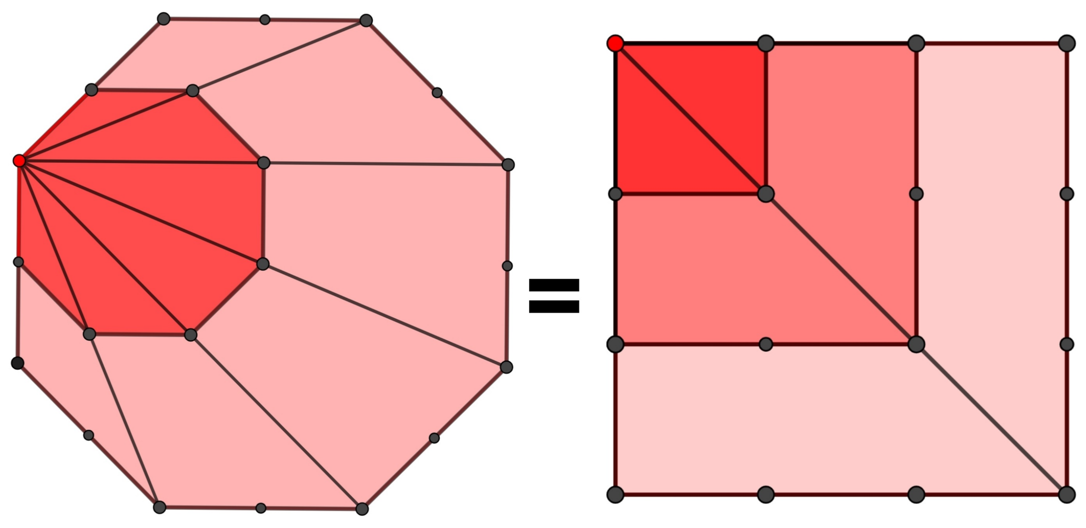

Figura 1: $Pyr_8(3) = Pyr_4(4)$

Da fórmula em (1), vemos que a igualdade (2) é equivalente à equação

$$(m-2)u^3+3u^2+(5-m)u = (n-2)v^3+3v^2+(5-n)v. \qquad (3)$$

Principais Resultados

O principal resultado obtido por Kovács e Rábai diz respeito a existência e finitude de soluções para a equação dada em (3), onde exibem uma constante positiva C_1 que serve como limite prático aos valores de u e v na equação. Enunciamos esse resultado abaixo:
Teorema: *Dados m e n inteiros positivos, com $\min(m,n) \geq 3$ e $m \neq n$. Então, a equação dada em (3) possui um número finito de soluções para inteiros u e v, com $u, v \geq 3$. Ainda, $\max(u,v) < C_1$, onde C_1 é uma constante positiva calculada em termos de m e n.*
Sobre a constante C_1, veremos pelo Lema a seguir, que ela depende de m e n, mas não pode ser escrita em termos desses valores.
Lema: *Dados m e n inteiros positivos, com $\min(m,n) \geq 3$ e $m \neq n$. Então, a equação (3) é birracionalmente equivalente à equação de uma Curva Elíptica dada na forma de Weiertrass:*

$$y^2 = x^3 + c(m,n)x + d(m,n).$$

Os coeficientes c e d podem ser escritos em termos de m e n e a sua forma completa pode ser vista em [3].

Auxiliados por esse lema, temos o resultado seguinte que exibe todas as soluções inteiras positivas para a equação (3) com $3 \leq n < m \leq 10$.
Teorema: *Dados m e n, com $3 \leq n < m \leq 10$, todas as soluções para a equação (3) em inteiros positivos (u,v), com $(u,v) \neq (1,1)$ são:*

$$(m,n,u,v) \in \{(8,3,7,12),\ (9,3,2,3),\ (8,4,3,4),\ (10,4,55,87),\ (7,5,6,7),\ (10,6,35,44),\ (9,7,125,170)\}$$

Exemplo

Vamos analisar e resolver a equação dada pela igualdade $Pyr_9(u) = Pyr_7(v)$, que por (3) fica na forma

$$7u^3 + 3u^2 - 4u = 5v^3 + 3v^2 - 2v.$$

Pelo **Lema**, tomamos a transformação que a torna equivalente à equação de uma Curva Elíptica, dada na forma de Weierstrass, como

$$y^2 = x^3 - 1209x + 19361. \qquad (4)$$

Nesta equação aplicamos o Algoritmo de Gebel-Pethö-Zimmer de maneira análoga aos exemplos calculados no Capítulo 3 de [4]. Utilizamos o *software* SageMath que nos dá os pontos racionais da base de Mordel-Weil da curva elíptica (4), são eles: $P_1 = (19,57)$, $P_2 = (25,-69)$, $P_3 = (-5,-159)$, $P_4 = (-41,3)$. Assim, todo ponto racional, P, de (4) é escrito como $P = m_1P_1 + m_2P_2 + m_3P_3 + m_4P_4$, para únicos $m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4 \in \mathbb{Z}$.
Com esses pontos da base, calculamos os logaritmos elípticos associados a eles, junto aos processos de redução descritos em [4], nos é permitido encontrar uma estimativa para $M = \max\{m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4\}$. Encontramos $M < 13$. Assim, aplicamos o inverso da transformação que nos dá a equação (4) e calculamos os valores inteiros que são soluções da igualdade $Pyr_9(u) = Pyr_7(v)$. São eles: $(u,v) \in \{(-1,-1),\ (-1,0),\ (0,-1),\ (1,1),\ (152,170)\}$.

Referências

[1] Dickson, L.E. History of the Theory of Numbers, Volume II: Diophantine Analysis. Courier Dover Publications, 2012.
[2] Gebel, J.; Pethö, A.; Zimmer, H.G. Computing Integral Points on elliptic curves. Acta Arith, 1994.
[3] Kovács, T.; Rábai, Z. Equal values of pyramidal numbers. Indagationes Mathensticae 29, 2018.
[4] Silva, E. Calculando Pontos Inteiros em Curvas Elípticas de Posto Menor ou Igual que 6.