O grupo de tranças virtuais emolduradas

Ênio Carlos Leite & Oscar Ocampo

Universidade Federal da Bahia

leite.enio@ufba.br

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Seja VB_n o grupo de tranças virtuais com n cordas. Considere $\mathcal{F}VB_n := \mathbb{Z} \wr VB_n$ como sendo o grupo de tranças virtuais emolduradas, onde VB_n age em $\mathbb{Z}^n$ por permutação dos índices. Neste trabalho, damos uma apresentação para $\mathcal{F}VB_n$ e, também, concedemos interpretação geométrica para esse grupo. Além disso, introduzimos o grupo de tranças virtuais modulares emolduradas $\mathcal{F}VB_{r,n} := \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \wr VB_n$ e apresentamos uma breve consideração sobre a sua estrutura.

Introdução

Consideramos o grupo $\mathbb{Z}^n$ com a operação usual:

$$(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n) := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n).$$

O grupo $\mathbb{Z}^n$ é gerado pelos elementos emoldurados

$$f_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

com 1 na i-ésima posição. Então, por exemplo, $f_i^m = (0, \ldots, 0, m, 0, \ldots, 0)$ e $f_i f_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, com 1 nas i, j posições, e um elemento $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ pode ser expresso como:

$$a = f_1^{a_1} f_2^{a_2} \cdots f_n^{a_n}.$$

Seja também VB_n o grupo de tranças virtuais em n cordas gerado pelo conjunto de $2(n-1)$ geradores: $\{\sigma_i, v_i \mid i = 1, 2, \ldots, n-1\}$, com relações

$$\begin{aligned} v_i^2 &= 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \quad \text{para} \quad |i-j| > 1, \\ v_i v_j &= v_j v_i \quad \text{para} \quad |i-j| > 1, \\ \sigma_i v_j &= v_j \sigma_i \quad \text{para} \quad |i-j| > 1, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ v_i v_{i+1} v_i &= v_{i+1} v_i v_{i+1}, \\ v_i v_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} v_i v_{i+1}. \end{aligned}$$

Agora, consideramos o grupo simétrico S_n, gerado por $(n-1)$ transposições $s_i := (i \;\; i+1)$, e seja π a projeção de VB_n em S_n. Denotamos $\pi(\alpha)(j)$ por $\alpha(j)$, $\alpha \in \{\sigma, v\}$ para qualquer $j = 1, \ldots, n$. Em particular, $\alpha_i(j) = s_i(j)$, $\alpha_i \in \{\sigma_i, v_i\}$. Usando π definimos o *grupo de tranças virtuais emolduradas* $\mathcal{F}VB_n$ como

$$\mathcal{F}VB_n = \mathbb{Z} \wr VB_n = \mathbb{Z}^n \rtimes VB_n,$$

onde a ação de VB_n em $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ é dada permutando os índices

$$\alpha(a) = (a_{\alpha(1)}, \ldots, a_{\alpha(n)}) \quad (\alpha \in VB_n),$$

$\alpha \in \{\sigma, v\}$.

Na notação acima, a ação de VB_n em $\mathbb{Z}^n$ é dada pela fórmula multiplicativa

$$\alpha(f_1^{a_1} f_2^{a_2} \cdots f_n^{a_n}) = f_1^{a_{\alpha(1)}} f_2^{a_{\alpha(2)}} \cdots f_n^{a_{\alpha(n)}} \quad (\alpha \in VB_n).$$

Qualquer palavra em $\mathcal{F}VB_n$ se divide, por construção, na parte do 'enquadramento' e na parte de 'trança'. Ou seja, pode ser escrito na forma

$$f_1^{k_1} f_2^{k_2} \cdots f_n^{k_n} \cdot \alpha, \quad \text{onde } k_i \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \in VB_n.$$

A multiplicação em $\mathcal{F}VB_n$ é definida usando a ação de VB_n em $\mathbb{Z}^n$ como segue

$$(f_1^{a_1} \cdots f_n^{a_n} \alpha)(f_1^{b_1} \cdots f_n^{b_n} \beta) := f_1^{a_1 + b_{\alpha(1)}} \cdots f_n^{a_n + b_{\alpha(n)}} \alpha\beta.$$

Definição: *O grupo de tranças virtuais modulares emolduradas* em n cordas é definido como $\mathcal{F}VB_{r,n} := \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \wr VB_n = (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n \rtimes VB_n$.

O grupo $\mathcal{F}VB_{r,n}$ pode ser considerado como o quociente de $\mathcal{F}VB_n$ pela imposição das relações

$$f_i^r = 1, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Note agora que em $\mathcal{F}VB_n$ ou em $\mathcal{F}VB_{r,n}$ os f_i's podem ser deduzido de f_1, definindo por exemplo:

$$f_i = \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 f_1 \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1}.$$

Proposição: O grupo $\mathcal{F}VB_n$ tem uma apresentação reduzida com geradores $f_1, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ e relações:

$$\begin{aligned} f_1 \sigma_j &= \sigma_j f_1, \quad j > 1, \\ f_1 \sigma_1 f_1 \sigma_1^{-1} &= \sigma_1 f_1 \sigma_1^{-1} f_1, \\ \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 f_1 \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1} &= \sigma_{i-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} f_1 \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}. \end{aligned}$$

Interpretação geométrica

Geometricamente, um elemento de $\mathcal{F}VB_n$ é uma trança com cruzamentos clássicos e virtuais em n cordas, com cada corda decorada no topo por um inteiro, sua moldura. Um elemento de $\mathbb{Z}^n$, quando esse é visto como um subgrupo de $\mathcal{F}VB_n$, é identificado com a trança identidade em n cordas, sendo cada corda decorada pelo inteiro correspondente do elemento. Veja a Figura 1. Por outro lado, uma trança em VB_n, quando esse é visto como um subgrupo de $\mathcal{F}VB_n$, é entendida como uma trança emoldurada com todos os enquadramentos 0. Geometricamente, a multiplicação no grupo $\mathcal{F}VB_n$ é a concatenação usual em VB_n juntamente com a coleta do total enquadramento de cada corda para o topo da trança final. Veja a Figura 2 para uma ilustração.

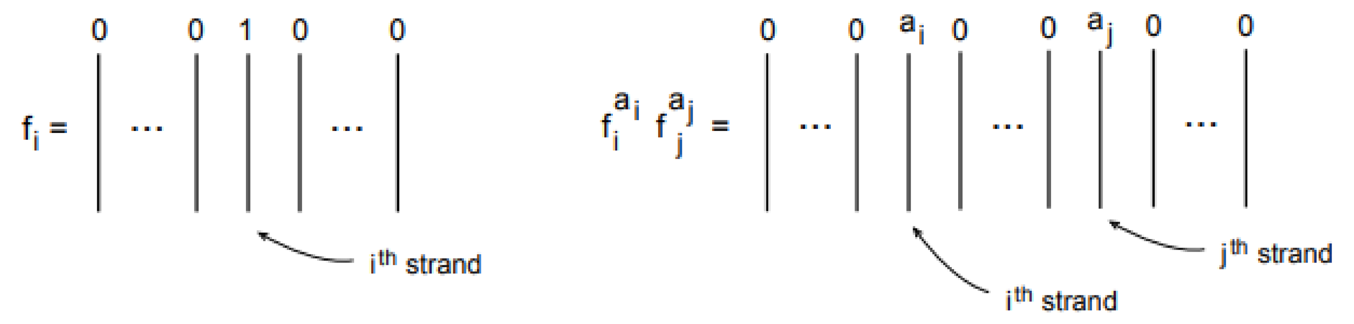

Figura 1: Interpretação geométrica para f_i e $f_i^{a_i} f_j^{a_j}$

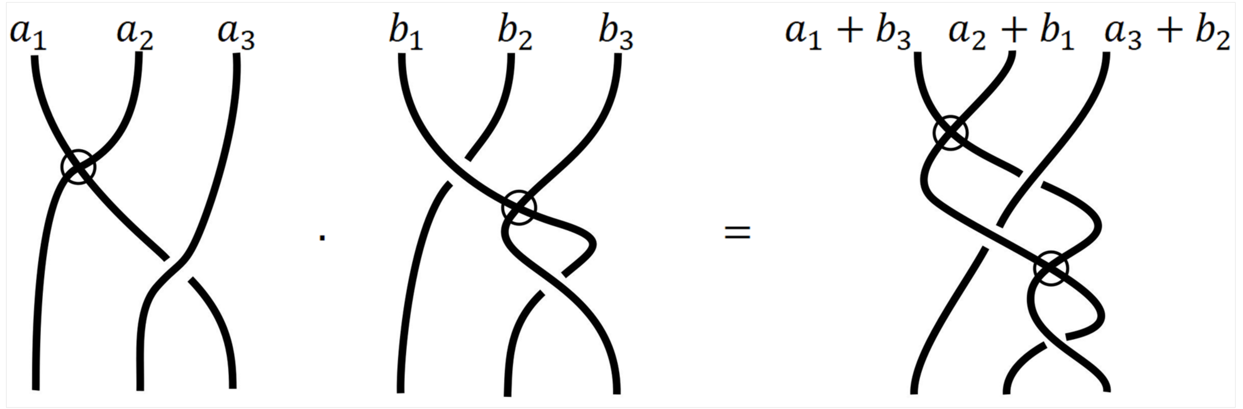

Figura 2: Multiplicação de tranças virtuais emolduradas

Claramente, $\mathcal{F}VB_{r,n}$ tem a mesma interpretação geométrica de $\mathcal{F}VB_n$, apenas que os enquadramentos das n cordas são retirados do grupo cíclico $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$.

Resultados

O grupo $\mathcal{F}VB_{r,n}$ é *quase-perfeito*, isto é, que $\mathcal{F}VB'_{r,n}$ é perfeito para $n \geq 5$, ou seja, o subgrupo comutador é igual ao segundo subgrupo comutador.

Teorema: O subgrupo $\mathcal{F}VB'_{r,n}$ é:
i) Finitamente gerado para $n \geq 5$.
ii) Perfeito para $n \geq 5$.

Referências

[1] V. G. Bardakov, *virtual and universal braids*. Fundam. Math., 184 (2004), 1-18.

[2] P. Bellingeri, and L. Paris, *Virtual braids and permutations*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 70 (3) (2020), 1341-1362.

[3] D. L. Johnson, *Presentations of groups*, LMS, Studies Texts 15 (1997).