Princípio do Máximo no Infinito e Aplicações

Elisa Joaquim Santos

Universidade Federal de Pernambuco

elisa.santos@ufpe.br

Os resultados apresentados aqui são parte de [2] com Fábio Reis dos Santos (UFPE).

Agradeço à CAPES e ao IMPA pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho veremos aplicações de um princípio do máximo no infinito para variedades Riemannianas completas e não compactas. Veremos que uma hipersuperfície orientável, completa e não compacta com operador de Weingarten positivo semi-definido, em uma variedade Riemanniana ou Lorentziana, transversal a um campo vetorial paralelo e que converge no infinito para este campo, deve ser totalmente geodésica. Por fim, apresentaremos novos resultados substituindo a hipótese do operador de Weingarten por curvatura média constante e limitação na curvatura de Ricci.

1 Introdução

A aplicação de princípios do máximo em resultados de caracterização constitui uma interessante área de pesquisa. O estudo de hipersuperfícies com curvatura média constante tem uma grande relevância. Matematicamente, desempenham um interessante papel devido às suas boas propriedades tipo Bernstein relacionadas a questões de existência e unicidade. Apresentaremos aplicações de um Princípio do Máximo no Infinito obtido por Alías, Caminha e Nascimento [1], a saber,

Teorema 1. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa, não compacta, orientável e X um campo suave em M^n. Considere uma função suave $f : M^n \to \mathbb{R}$ não negativa, não identicamente nula, convergindo para zero no infinito e tal que $\langle \nabla f, X\rangle \geq 0$. Se $\operatorname{div} X \geq 0$ em M^n, então $\langle \nabla f, X\rangle = 0$ em M^n e $\operatorname{div} X = 0$ em $M^n \backslash f^{-1}(0)$.*

2 Resultados Principais

Considere $\overline{M}^{n+1}_Z$ uma variedade Riemanniana munida de um campo paralelo não nulo e unitário Z. Seja $M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+1}_Z$ uma hipersuperfície orientada pelo campo normal e unitário N; e transversal ao campo Z tal que $\langle N, Z\rangle > 0$. Queremos responder o seguinte questionamento:

"Sob quais condições uma hipersuperfície transversal será totalmente geodésica? "

Considere $\theta : M^n \to [0, \pi/2)$ o ângulo entre N e Z dado por $\langle N, Z\rangle = \cos\theta$. Se $\theta \equiv 0$ em M^n, então $\langle N, Z\rangle \equiv 1$. Isto implica em $Z^\top = 0$ e como N e Z são unitários, devemos ter que $N \equiv Z$. Deste modo, para quaisquer $p \in M^n$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$, segue da fórmula de Weingarten e do paralelismo de Z,

$$A(X(p)) = -\overline{\nabla}_{X(p)}N(p) = -\overline{\nabla}_{X(p)}Z(p) = 0.$$

Logo, M^n é totalmente geodésica. Então veremos o que acontece quando o ângulo não é identicamente nulo.

2.1 Aplicações em Ambiente Riemanniano

Se θ não é identicamente nulo, então assumimos que N converge para Z no infinito, ou seja, θ converge para zero no infinito. Como primeira aplicação:

Teorema 2. *Seja M^n uma hipersuperfície completa, não compacta e orientada de $\overline{M}^{n+1}_Z$, transversal a Z. Se o operador de Weingarten A é positivo semi-definido e N converge para Z no infinito, então M^n é totalmente geodésica.*

Demonstração. A função $f = 1 - \langle N, Z\rangle$ e o campo $Z^\top$ cumpre as hipóteses de Teorema 1 que garante

$$\langle N, Z\rangle \operatorname{tr}(A) = \operatorname{div}(Z^\top) = 0 \quad \text{em} \quad M^n \backslash f^{-1}(0),$$

Por continuidade de N e Z, devemos ter que $A \equiv 0$ em $\partial(f^{-1}(0))$. Portanto, $A \equiv 0$ em M^n. □

A mesma conclusão é obtida assumindo que M^n possua curvatura média constante e que a curvatura de Ricci de $\overline{M}^{n+1}_Z$ na direção de N seja não negativa, como veremos a seguir.

Teorema 3. *Sejam M^n uma hipersuperfície completa, não compacta e orientada de $\overline{M}^{n+1}_Z$, transversal a Z. Assuma que a curvatura de Ricci de $\overline{M}^{n+1}_Z$ na direção de N seja não negativa. Se M^n possui curvatura média constante e N converge para Z no infinito, então M^n é totalmente geodésica e $\mathrm{Ric}_{\overline{M}}(N, N) = 0$.*

Demonstração. Sabemos que $f = 1 - \langle N, Z\rangle$ cumpre as condições do Teorema 1 e que

$$\operatorname{div}(A(Z^\top)) = \langle N, Z\rangle \left(\mathrm{Ric}_{\overline{M}}(N, N) + |A|^2\right) \geq 0.$$

Argumentando como no final do Teorema 2, $A \equiv 0$ em M^n. Pela definição de curvatura de Ricci e pelo paralelismo de Z temos $\mathrm{Ric}_{\overline{M}}(N, N) = 0$ em M^n. □

Observação 1. *A luz do Teorema 3, conseguimos uma reformulação no caso em que o ambiente $\overline{M}^{n+1}_Z$ é variedade Einstein, concluindo que M^n é totalmente geodésica e $\overline{M}^{n+1}_Z$ é Ricci flat.*

Encerramos as aplicações desta seção com um resultado do tipo Bernstein.

Corolário 1. *Seja M^n um gráfico inteiro em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média constante de modo que seu campo normal N converge para e_{n+1} no infinito. Então M^n é um hiperplano ortogonal a e_{n+1}.*

Demonstração. O campo normal ao gráfico é tal que $\langle N, e_{n+1}\rangle > 0$. Pelo Teorema 2, M^n é totalmente geodésica. Assim, por argumentos de completude e convergência, $M^n = \mathcal{H}$, com $\mathcal{H}$ hiperplano e $N = e_{n+1}$. □

2.2 Aplicações em Ambiente Lorentziano

Os resultados são válidos se $\overline{M}^{n+1}_Z$ é Lorentziana e está munida de um campo tipo-tempo paralelo e unitário Z; em que $M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+1}_Z$ é uma hipersuperfície tipo-espaço com campo tipo-tempo normal e unitário N; de modo que $\langle N, Z\rangle < 0$. O primeiro resultado é a versão Lorentziana do Teorema 2.

Teorema 4. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço completa e não compacta de $\overline{M}^{n+1}_Z$. Se o operador de Weingarten A é positivo semi-definido e N converge para Z no infinito, então M^n é totalmente geodésica.*

A condição na curvatura de Ricci é a Condição de Convergência Temporal (TCC), que é quando $\mathrm{Ric}_{\overline{M}}(X, X) \geq 0$, para todo campo tipo-tempo $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Com isso, o Teorema 3 pode ser reformulado, além de obtermos um resultado do tipo Calabi-Bernstein.

Teorema 5. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço completa e não compacta de $\overline{M}^{n+1}_Z$. Assuma que $\overline{M}^{n+1}_Z$ satisfaz a TCC. Se M^n possui curvatura média constante e N converge para Z no infinito, então M^n é totalmente geodésica e $\mathrm{Ric}_{\overline{M}}(N, N) = 0$.*

Corolário 2. *Seja M^n um gráfico inteiro em $\mathbb{L}^{n+1}$ com curvatura média constante de modo que seu campo normal tipo-tempo K converge para o vetor e_{n+1} no infinito. Então M^n é um hiperplano tipo-espaço ortogonal a e_{n+1}.*

Observação 2. *Como na seção anterior, se $\overline{M}^{n+1}_Z$ é espaço-tempo Einstein, concluímos que M^n é totalmente geodésica e $\overline{M}^{n+1}_Z$ é Ricci flat.*

Referências

[1] L.J. Alías, A. Caminha and F.Y. do Nascimento, *A maximum principle at infinity with applications to geometric vector fields*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **474** (2019), 242–247.

[2] E.J. Santos, *Princípios do Máximo no Infinito e Aplicações*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco (2022).