Descrição Analítica das Bacias de Atração do Método de Newton para uma Função Real Univariada

Eleonora Avello - Universidade Federal do Paraná - eleonora.avello@gmail.com

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Considere uma função contínua e diferenciável dada por $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e o seguinte sistema (1), normalmente não linear, como problema a ser resolvido

$$F(x) = 0. \tag{1}$$

Defina agora o conjunto

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \det\big(J_F(x)\big) \neq 0\},$$

e a função de Newton $N : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$N(x) = x - (J_F(x))^{-1}F(x).$$

O método iterativo de Newton para a resolução do sistema (1) é dado por

$$x_{k+1} = N(x_k), \; k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Definição 1. *Seja $x^* \in \mathbb{R}^n$ uma raiz de F. A bacia de atração da raiz x^* é conjunto de todos os pontos x_0 tais que a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, iniciada em x_0, gerada pelo método de Newton* (2) *converge para x^*.*

Objetivos

1. Fazer um estudo sobre as bacias de atração do método de Newton para a função real univariada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3 - 3x$.
2. Caracterizar todos os pontos para os quais o método de Newton deixará de convergir para a função estudada.
3. Descrever analiticamente as bacias de atração da função estudada.

Desenvolvimento

Tome a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3x$ cujas raizes são $\hat{x} = -\sqrt{3}$, $\bar{x} = 0$ e $x^* = \sqrt{3}$. Para esta função f, temos $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\}$ e $N : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$N(x) = \frac{2x^3}{3(x^2-1)}. \tag{3}$$

A restrição de N em $(1, \infty)$ atinge seu mínimo global em $x^* = \sqrt{3}$, com $N(x^*) = \sqrt{3}$. Por outro lado, o máximo de N em $(-\infty, -1)$ é $-\sqrt{3}$, em $\hat{x} = -\sqrt{3}$. Também é notório ver que a restrição de N em $(-1, 1)$ é injetiva e decrescente.

Considere um ponto inicial $x_0 > 1$. Então a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, gerada pelo método de Newton (2), converge para a raiz $x^* = \sqrt{3}$. Ademais, a convergência é quadrática, como esperado (ver [3, Teorema 5.13]). Por outro lado, se $x_0 < -1$, então a sequência gerada pelo método de Newton converge quadraticamente para a raiz $\hat{x} = -\sqrt{3}$.

Para continuar nossa análise, precisamos considerar pontos de partida no intervalo $[-1, 1]$. Para isso, discutimos como retroceder o passo de Newton por meio da restrição de N a $(-1, 1)$, que é injetiva.

Definição 2. Considere a inversa $T = N^{-1} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$. Dado $y \in \mathbb{R}$, o *passo de Newton para trás* de y é definido como $x = T(y)$.

A função T, dada na Definição 2 e ilustrada na Figura 1, é decrescente, contínua, e ímpar.

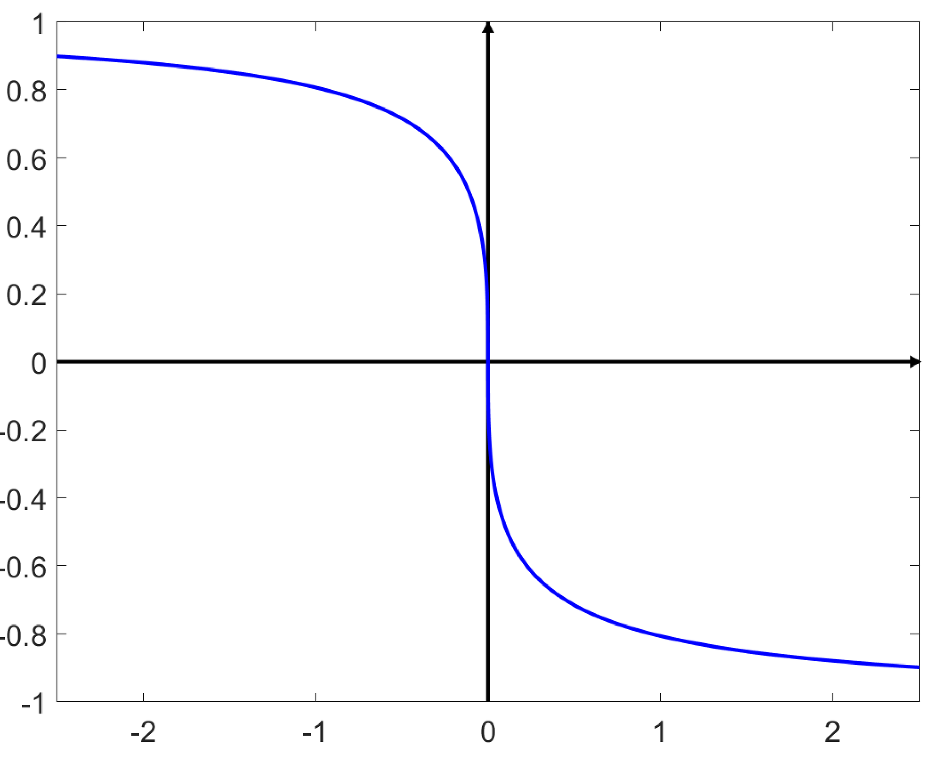

Figura 1: Gráfico da função $T = N^{-1} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$.

O próximo lema nos ajudará a caracterizar todos os pontos para os quais o método de Newton, aplicado à função f, deixará de convergir.

Lema 1. *Defina as sequências $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ como $y_0 = 1$, $z_0 = -1$, $y_{k+1} = T(z_k)$ e $z_{k+1} = T(y_k)$. Denote $\tilde{y} = \sqrt{3/5}$ e $\tilde{z} = -\sqrt{3/5}$, valem as seguintes propriedades:*

1. $T(\tilde{y}) = \tilde{z}$;
2. $z_k = -y_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$;
3. $\tilde{y} < y_{k+1} < y_k$ *e* $z_k < z_{k+1} < \tilde{z} \quad \forall k \in \mathbb{N}$;
4. $y_k \to \tilde{y}$ *e* $z_k \to \tilde{z}$.

Resultados

Teorema 1. *Sejam $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ as sequências definidas no Lema 1. As bacias de atração das raízes $x^* = \sqrt{3}$ e $\hat{x} = -\sqrt{3}$ são*

$$(y_0, \infty) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (y_{2j}, y_{2j-1})\right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} (z_{2j}, z_{2j+1})\right) \tag{4}$$

e

$$(-\infty, z_0) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (z_{2j-1}, z_{2j})\right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} (y_{2j+1}, y_{2j})\right) \tag{5}$$

respectivamente.

Teorema 2. *Sejam $\tilde{y}$ e $\tilde{z}$ as constantes definidas no Lema 1. Iniciando em $x_0 \in (\tilde{z}, \tilde{y})$, a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gerada pelo método de Newton converge para a raiz $\overline{x} = 0$ com velocidade cúbica.*

Na Figura 2 temos as bacias de atração do método de Newton das três raízes trabalhadas.

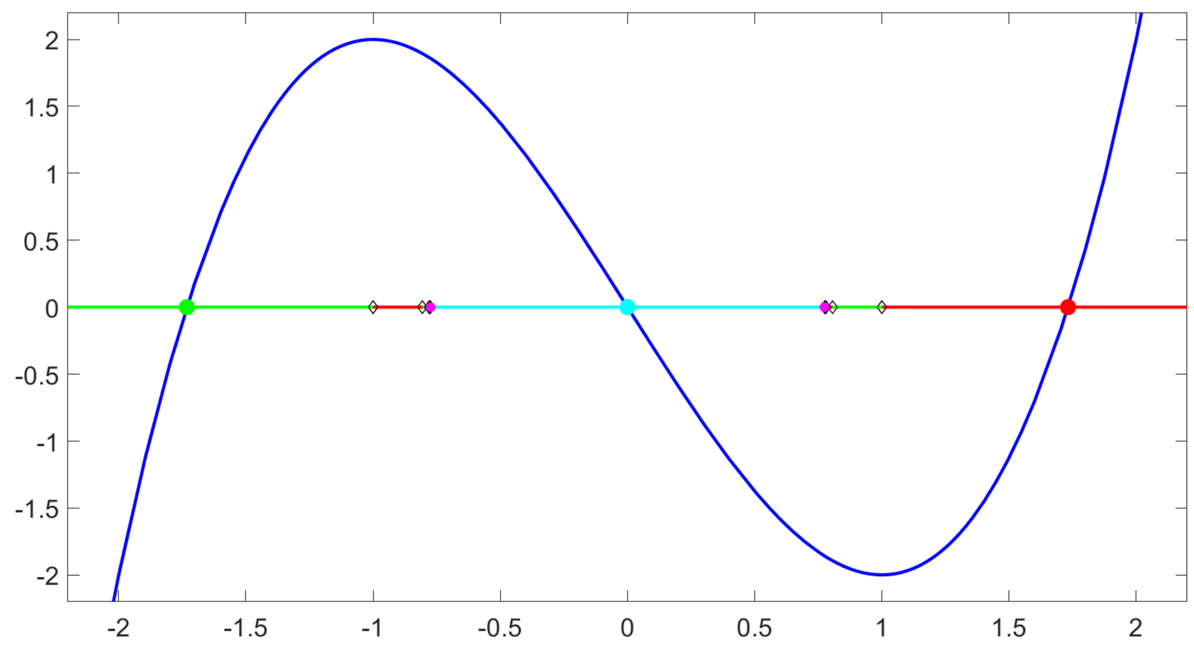

Figura 2: Bacias de atração do Método de Newton para a função $f(x) = x^3 - 3x$.

Conclusão

- Foi necessário definir a função de Newton $N : \Omega \to \mathbb{R}$, e estudá-la em restrições de seu domínio. A saber, nos intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ e $(1, \infty)$.
- Através da função T foi possível definir as sequências $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, bem como caracterizar os pontos de falha do método de Newton para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ escolhida.
- As sequências $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ foram essenciais na descrição analítica das bacias de atração das raízes $x^* = \sqrt{3}$ e $\hat{x} = -\sqrt{3}$.
- A bacia de atração do método de Newton da raiz $\overline{x} = 0$ foi muito simples de obter e, curiosamente, teve velocidade de convergência cúbica.

Referências

[1] M. Cristina C. Cunha. *Métodos Numéricos*. Editora Unicamp, 2 edition, 2000.

[2] E L Lima. *Análise Real - vol. 1 - Funções de uma Variável*. IMPA, 13 edition, 2020.

[3] A A Ribeiro and E W Karas. *Otimização Contínua: Aspectos teóricos e computacionais*. Cengage Learning, Brazil, 2013. In portuguese.