Quasideterminantes e Variedade de Gelfand-Tsetlin

[1]Edwin Mateus & [2]Stefan Ehbauer & [3]German Benitez

[1] Pós graduação em Matematica -UFAM– Bolsista CAPES,
[2]Professor Doutor na UFAM, [3]Professor Doutor na UFAM

[1]edwinmateus159@gmail.com,[2]stefan_ehbauer@ufam.edu.br,
[3]gabm@ufam.edu.br

impa
Instituto de Matemática
Pura e Aplicada

Introdução

Os determinantes são uma ferramenta principal na álgebra linear comutativa, entretanto, nesta teoria várias fórmulas clássicas não são válidas para o caso não comutativo. Tendo o exposto acima como motivação, I. Gelfand e V. Retakh em 1991[2] desenvolveram a teoria dos quasi-determinantes para matrizes com entradas em um anel que não é necessariamente comutativo. Seja $\Bbbk$ um corpo, uma *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ é um $\Bbbk$-espaço vetorial, munido de um produto $\Bbbk$-bilinear $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ (chamado de colchete de Lie), tal que satisfaz: i) $[x, x] = 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}$; ii) Identidade de Jacobi. Seja U uma $\Bbbk-$álgebra associativa com identidade 1_U e $i : \mathfrak{g} \longrightarrow U$ uma aplicação que satisfaz:

$$i([x,y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x) \qquad \forall x,y \in \mathfrak{g},$$

isto é, que i é um homomorfismo de álgebras de Lie. Dizemos que o par (U, i) é chamada a *álgebra envolvente universal* de $\mathfrak{g}$. A subálgebra de $U(\mathfrak{gl}_n)$ gerada por $\{Z(U(\mathfrak{gl}_i)) | i = 1, ..., n\}$ é chamada de *subálgebra de Gelfand-Tsetlin* de $U(\mathfrak{gl}_n)$ e será denotada por Γ, onde $Z(U(\mathfrak{gl}_i))$ denota o centro da álgebra envolvente universal de $\mathfrak{gl}_i$. Tomando o exposto acima como motivação, neste trabalho realizaremos um estudo no caso particular quando fixamos a álgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n$, e trabalhamos as matrizes com entradas na álgebra envolvente universal de $\mathfrak{gl}_n$, para poder definir a variedade de Gelfand-Tsetlin como uma variedade algébrica, lembre-se que o conjunto $\mathbb{A}^n_{\Bbbk} := \{a := (a_1, ..., a_n) | a_i \in \Bbbk, \text{para } i = 1, ..., n\}$ é dito *espaço afim* sobre $\Bbbk$ e para o subconjunto $S \subset \Bbbk[x_1, ..., x_n]$ de polinômios chamamos $V(S) := \{a \in \mathbb{A}^n_{\Bbbk} | f(a) = 0, \forall f \in S)\} \subset \mathbb{A}^n_{\Bbbk}$ o conjunto de zeros de S. Subconjuntos de $\mathbb{A}^n_{\Bbbk}$ de esta forma são chamadas de *variedades algébricas*.

Resultados

Definição 1. *Seja $A = (a_{ij})^n_{i,j=1} \in M_n(R)$, com R um anel com identidade, tais que a matriz A^{ij} é invertível. Dizemos que o $ij-$ésimo* ***quasi-determinante*** *de A é definido pela formula*

$$|A|_{ij} = a_{ij} - r_i^j (A^{ij})^{-1} c_j^i.$$

Agora seja q uma variável formal e I a matriz identidade de $n \times n$,

Definição 2. *Seja $A = (a_{ij})^n_{i,j=1} \in M_n(R)$, com R um anel arbitrário com identidade e $i \in \{1, 2, ..., n\}$ fixo. As* ***funções simétricas elementares não comutativas*** *$\Lambda^{(i)}_k$ associadas a matriz A são definidas como os coeficientes da expansão do seguinte quasi-determinante*

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{(i)} q^k = |I + qA|_{ii}.$$

Temos também outra família de funções simétricas não comutativas de A a qual é a ***Serie de potencias de primeiro tipo*** *$\Psi^{(i)}_k$ definida como:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k^{(i)} q^{k-1} = |I - qA|_{ii} \frac{d}{dq} |I - qA|_{ii}^{-1}.$$

Continuando com a matriz A, considere o grafo orientado completo $\mathcal{A}$ com n vértices $\{1, 2, ..., n\}$ e a flecha de i para j será indexada por a_{ij}. Cada caminho do vértice i para o vértice j define um monômio da seguinte forma

$$a_{ir_1} a_{r_1 r_2} \cdots a_{r_{k-2} r_{k-1}} a_{r_{k-1} j}$$

o qual é obtido considerando o produto de indexações das flechas consecutivas do caminho. O inteiro positivo k é considerado o comprimento do caminho. Além disso chamamos de caminho simples ao caminho tal que $r_s \neq i, j$ para todo $s \in \{1, 2, ..., k-1\}$. Temos a seguinte descrição das funções simétricas não comutativas definidas acima em termos do grafo $\mathcal{A}$.

Proposição 1. *[2][3]*

i) $(-1)^{k-1} \Lambda^{(i)}_k$ é a soma de todos os monômios indexando caminhos simples de i para i em $\mathcal{A}$ de comprimento k.

ii) $\Psi^{(i)}_k$ é a soma de todos os monômios indexando caminhos de i para i em $\mathcal{A}$ de comprimento k, o coeficiente de cada monômio é o comprimento do primeiro retorno ao vértice i.

Agora considere em $\mathfrak{gl}_n$ as matrizes $E_m \in M_m(U(\mathfrak{gl}_m))$ para cada $1 \leq m \leq n$, e as funções simétricas não comutativas $\Lambda^{(m)}_k$ e $\Psi^{(m)}_k$ associadas a matriz $E_m + (1 - m)I_m$. Pela proposição anterior, temos expressões explicitas para essas funções. Considere para cada $k \geq 1$

$$\Lambda_{nk} := \sum_{i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k} \Lambda^{(1)}_{i_1} \Lambda^{(2)}_{i_2} \cdots \Lambda^{(n)}_{i_n}, \qquad \Psi_{nk} := \sum_{i=1}^{n} \Psi^{(i)}_k$$

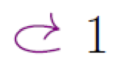
onde os índices i_k são inteiros não negativos e $\Lambda^{(m)}_0 = 1$.

Teorema 1. *[2][3] Os elementos Λ_{nk}, Ψ_{nk} com $k \geq 1$ pertencem ao centro $Z(U(\mathfrak{gl}_n))$.*

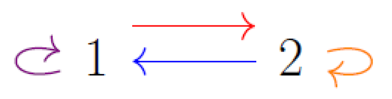
Corolário 1. *[2][3] A subálgebra de Gelfand-Tsetlin Γ é gerada por cada família de elementos $\{\Lambda^{(i)}_k\}$ e $\{\Psi^{(i)}_k\}$, com $1 \leq k \leq i \leq n$.*

Exemplo 1. *Consideremos a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_3$, pelo corolário, o centro de $U(\mathfrak{gl}_3)$ é gerado por $\Psi_{31}, \Psi_{32}, \Psi_{33}$ onde:*

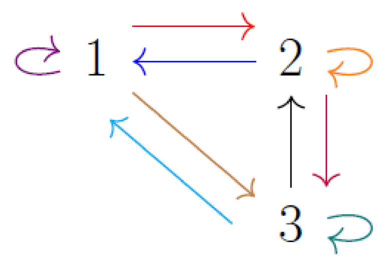
$$E_1 + (1-1)I_1 = \left(E_{11}\right)_{1\times 1}$$



$$E_2 + (1-2)I_2 = \begin{pmatrix} E_{11} - 1 & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} - 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$



$$E_3 + (1-3)I_3 = \begin{pmatrix} E_{11} - 2 & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} - 2 & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} - 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$



$$\begin{aligned}
\Psi_{31} &= E_{11} + E_{22} - 1 + E_{33} - 2, \\
\Psi_{32} &= E_{11}^2 + 2E_{21}E_{12} + (E_{22} - 1)^2 + 2E_{31}E_{13} + 2E_{32}E_{23} + E_{33}^2, \\
\Psi_{33} &= E_{11}^3 + (E_{22} - 1)^3 + (E_{22} - 1)E_{21}E_{12} + 2E_{21}E_{12}(E_{22} - 1) + \\
&+ 3E_{21}(E_{11} - 1)E_{12} + (E_{33} - 2)^3 + (E_{33} - 2)E_{31}E_{13} + \\
&+ (E_{33} - 2)E_{32}E_{23} + 2E_{31}E_{13}(E_{33} - 2) + 2E_{32}E_{23}(E_{33} - 2) + \\
&+ 3E_{31}E_{12}E_{23} + 3E_{32}E_{21}E_{13} + 3E_{31}(E_{11} - 2)E_{13} + \\
&+ 3E_{32}(E_{22} - 2)E_{23}.
\end{aligned}$$

Portanto a subálgebra de Gelfand Tsetlin para $\mathfrak{gl}_3$ é gerada por $\Gamma = \langle \Psi_{31}, \Psi_{32}, \Psi_{33} \rangle$.

Definição 3. *Chamamos de* ***Variedade de Gelfand-Tsetlin*** *para $\mathfrak{gl}_n$ como a variedade algébrica*

$$V(\{\overline{\Psi}_{ij} | i = 1, ..., n; j = 1, ..., i\}) \subset \mathbb{A}^{n^2}_{\Bbbk}$$

onde $\overline{\Psi}_{ij} \in \Bbbk[\overline{E}_{ij}]_{i,j=1,2,...,n}$.

Teorema 2. *[4] A variedade de Gelfand-Tsetlin para $\mathfrak{gl}_n$ é equidimensional de dimensão $n(n-1)$.*

Referências

[1] G. A. Benitez, "Gelfand-Tsetlin varierties for $\mathfrak{gl}_n$", Internat. J. Algebra Comput. 30, no.7, 1485-1504, 2020.

[2] I.M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V.S. Retakh and J.-Y. Thibon, "NONCOMMUTATIVE SYMMETRIC FUNCTIONS", Adv. in Math. 112 (1995).

[3] A. Molev, "Yangians and Classical Lie Algebras", volume 143 of Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, 2007.

[4] S. Ovsienko, "Strongly nilpotent matrices and Gelfand–Zetlin modules", Linear Algebra Appl. 365 (2003) 349–367.