Soluções positivas para problema elíptico do tipo Kirchhoff via Quociente de Rayleigh

Eduardo Dias Lima & Edcarlos Domingos da Silva

Universidade Federal de Goiás - UFG

duardo.dias16@hotmail.com & edcarlos@ufg.br

impa
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Introdução

O objetivo do presente trabalho é investigar a existência de soluções positivas para problemas elípticos com não linearidades côncavas-convexas envolvendo equações do tipo Kirchhoff, veja por exemplo [1, 2]. Mais especificamente, consideramos o problema elíptico dado em (P_λ). A ideia principal é mostrar que existe pelo menos uma solução positiva ground state e uma solução positiva bound state para o problema (P_λ). Para isso, usamos os conceitos dos métodos quociente de Rayleigh não linear e variedade de Nehari.

Resultados Preliminares

No que segue, estudamos seguinte problema

$$\begin{cases} -m\left(\|\nabla u\|_2^2\right)\Delta u + V(x)u = \lambda a(x)|u|^{q-2}u + b(x)|u|^{p-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \qquad (P_\lambda)$$

onde $N \geq 3$ e o parâmetro $\lambda > 0$. Enfatizamos que o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é contínuo e limitado inferiormente por uma constante positiva e

(a_0) A função $m(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t^\sigma$, com $t \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha_1, \alpha_2 > 0$;

(a_1) $1 \leq q < 2 < 2(\sigma+1) < p < 2^* = 2N/(N-2)$ e $0 < \sigma < 2/(N-2)$;

(a_2) As funções $a, b : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfazem $a \in L^{r_1}(\mathbb{R}^N)$ e $b \in L^{r_2}(\mathbb{R}^N)$ onde

$$\left(\frac{2^*}{q}\right)' < r_1 \leq \left(\frac{2}{q}\right)', \left(\frac{2^*}{p}\right)' < r_2 \leq \left(\frac{2}{p}\right)'$$

com $a(x), b(x) > 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$;

(V_1) $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e existe $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

É importante enfatizar que o espaço de trabalho é definido por

$$X = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < +\infty\right\}.$$

O produto interno e a norma do espaço X são denotados por

$$\langle u, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [\alpha_1 \nabla u \nabla \varphi + V(x)u\varphi]\, dx, \ \varphi \in X$$

e

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\alpha_1|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right] dx, \ u \in X.$$

Observe que $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach e que a hipótese (V_1) implica que o espaço X está imerso continuamente em $L^r(\mathbb{R}^N)$, para cada $r \in [2, 2^*)$. Neste momento, definimos o funcional energia $J : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ associado ao problema (P_λ) dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{\lambda}{q}\|u\|_{q,a}^q - \frac{1}{p}\|u\|_{p,b}^p,$$

onde

$$\|u\|_{q,a}^q = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^q dx \ \text{ e } \ \|u\|_{p,b}^p = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx.$$

Lembre-se que uma função $u \in X$ é um ponto crítico para o funcional J se, e somente se, $J'(u)\varphi = 0$ para cada $\varphi \in X$. Adicionalmente, considere a *variedade de Nehari* dada por

$$\mathcal{N} = \left\{u \in X\backslash\{0\} : \lambda\|u\|_{q,a}^q = \|u\|^2 + \alpha_2\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \|u\|_{p,b}^p\right\}.$$

Assim, dividimsos a variedade $\mathcal{N}$ em três subconjuntos:

$$\mathcal{N}^+ = \{u \in \mathcal{N} : J'(u)u = 0, J''(u)(u,u) > 0\},$$
$$\mathcal{N}^- = \{u \in \mathcal{N} : J'(u)u = 0, J''(u)(u,u) < 0\},$$
$$\mathcal{N}^0 = \{u \in \mathcal{N} : J'(u)u = 0, J''(u)(u,u) = 0\}.$$

Agora, tomando emprestados algumas ideias discutidas em [3], consideramos os quocientes de Rayleigh $R_n, R_e : X\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ associados ao parâmetro $\lambda > 0$ nos seguintes formatos:

$$R_n(u) = \frac{\|u\|^2 + \alpha_2\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \|u\|_{p,b}^p}{\|u\|_{q,a}^q},$$

e

$$R_e(u) = \frac{\frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha_2}{2(\sigma+1)}\|\nabla u\|_2^{2(\sigma+1)} - \frac{1}{p}\|u\|_{p,b}^p}{\frac{1}{q}\|u\|_{q,a}^q}.$$

Para facilitar a notação, definimos $S_n(u) = \sup\limits_{t>0} R_n(tu)$ e $S_e(u) = \sup\limits_{t>0} R_e(tu)$. Dessa forma, considere os extremos:

$$\lambda^* = \inf_{u \in X\backslash\{0\}} S_n(u) \ \text{ e } \ \lambda_* = \inf_{u \in X\backslash\{0\}} S_e(u).$$

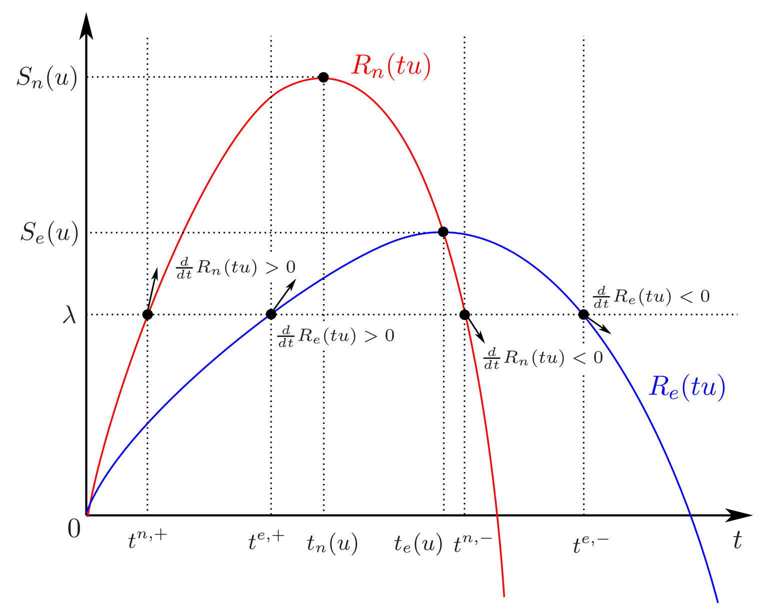

Figura 1: Geometria dos funcionais $R_n(tu)$ e $R_e(tu)$, $t > 0$.

Proposição 1: Suponha (a_0)-(a_2) e (V_1). Então $\lambda^*, \lambda_* > 0$ são atingidos por alguma função $u \in X\backslash\{0\}$.

Proposição 2: Suponha (a_0)-(a_2) e (V_1). Então, a *fibering map* $\phi(t) = J(tu)$ tem exatamente dois pontos críticos distintos, a saber, $t^{n,-}(u)u \in \mathcal{N}^-$ e $t^{n,+}(u)u \in \mathcal{N}^+$ sempre que $\lambda < S_n(u)$.

Proposição 3: Suponha (a_0)-(a_2) e (V_1). Então, o conjunto $\mathcal{N}^0 = \emptyset$ quando $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Além disso, o conjunto $\mathcal{N}^0 \neq \emptyset$ quando $\lambda \geq \lambda^*$.

Proposição 4: Suponha (a_0)-(a_2), (V_1) e $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Então, os conjuntos $\mathcal{N}^+$ e $\mathcal{N}^-$ são não-vazios. Além disso, $\mathcal{N}^+$ e $\mathcal{N}^-$ são variedades de classe $C^1(X\backslash\{0\}; \mathbb{R})$.

Proposição 5: Suponha (a_0)-(a_2), (V_1) e $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Então, existe uma constante $c > 0$ tal que $\|u\| \geq c > 0$, para cada $u \in \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$.

Lema 1: Suponha (a_0)-(a_2) e (V_1). Então, o funcional J é coercivo sobre $\mathcal{N}$ para cada $\lambda > 0$. Em particular, o funcional J é limitado por baixo em $\mathcal{N}$.

Lema 2: Suponha (a_0)-(a_2) e (V_1). Assume também que $u \in \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-$ seja um minimizador para o funcional J. Então, u é um ponto crítico para o funcional energia J em X, isto é, $J'(u)\varphi = 0$, para cada $\varphi \in X$ com $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Lema 3: Suponha (a_0)-(a_2), (V_1) e $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Considere $(u_k) \subset \mathcal{N}^+$ uma sequência minimizante para J em $\mathcal{N}^+$. Então, existe $u \in X\backslash\{0\}$ tal que, a menos de uma subsequência, $u_k \to u$ em X, onde $u \in \mathcal{N}^+$. Consequentemente, obtemos que $c_{\mathcal{N}^+} = J(u)$.

Lema 4: Suponha (a_0)-(a_2), (V_1) e $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Então, o funcional J admite pelo menos dois pontos críticos u e v, para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Além disso, as soluções fracas u e v são estritamente positivas em $\mathbb{R}^N$.

Resultado Principal

Teorema 1: Suponha (a_0)-(a_2), (V_1) e $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Então, o problema (P_λ) admite pelo menos duas soluções distintas positivas, a saber, $u \in \mathcal{N}^+$ e $v \in \mathcal{N}^-$.

Referências

[1] G. Kirchhoff, *Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1883.

[2] G. M. Figueiredo, *Existence of a positive solution for Kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument*, J. Math. Anal. Appl. 401 (2013) 706–713.

[3] Y. Il'yasov, *On extreme values of Nehari manifold method via nonlinear Rayleigh's quotient*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 49 (2017) 683–714.

Agradecimentos

Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás e a Universidade Federal de Goiás pelo financiamento deste trabalho.