Conexão de Shilnikov Em Sistemas Lineares Por Partes em $\mathbb{R}^3$.

Eduarda Almeida & Oscar Ramirez

Universidade Federal de Viçosa-DMA

eduarda.almeida1@ufv.br
oscar.ramirez@ufv.br

Resumo

Nesse trabalho, estudamos a existência e unicidade de conexões homoclínicas em sistemas de equações diferenciais ordinárias suaves por partes. Em particular, analisamos a ocorrência de uma conexão homoclínica, do tipo Shilnikov, para sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares por partes em $\mathbb{R}^3$.

Introdução

Considere um sistema linear por partes de equações diferenciais ordinárias da forma

$$Z(x,y,z) = \begin{cases} X(x,y,z), & \text{se} \quad h(x,y,z) > 0, \\ Y(x,y,z), & \text{se} \quad h(x,y,z) < 0, \end{cases} \tag{1}$$

onde

$$X(x,y,z) = \begin{pmatrix} a_{11}^{+} & a_{12}^{+} & a_{13}^{+} \\ a_{21}^{+} & a_{22}^{+} & a_{23}^{+} \\ a_{31}^{+} & a_{32}^{+} & a_{33}^{+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^{+} \\ b_2^{+} \\ b_3^{+} \end{pmatrix},$$

$$Y(x,y,z) = \begin{pmatrix} a_{11}^{-} & a_{12}^{-} & a_{13}^{-} \\ a_{21}^{-} & a_{22}^{-} & a_{23}^{-} \\ a_{31}^{-} & a_{32}^{-} & a_{33}^{-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^{-} \\ b_2^{-} \\ b_3^{-} \end{pmatrix},$$

e $h(x,y,z) = z$, onde $a_{ij}^{\pm}, b_i^{\pm} \in \mathbb{R}$ e $1 \leq i,j \leq 3$. As soluções do sistema (1) estão definidas segundo as convenções de Filippov, para mais detalhes ver [3]. Segundo a qual a variedade $\Sigma = h^{-1}(0)$ pode ser dividida em três regiões:

- **Região de Costura:** $\Sigma^c = \{p \in \Sigma | Xh(p)Yh(p) > 0\}$,
- **Região de Deslize:** $\Sigma^s = \{p \in \Sigma | Xh(p)Yh(p) < 0\}$,
- **Região de Tangência:** $\Sigma^t = \{p \in \Sigma | Xh(p)Yh(p) = 0\}$,

onde

$$Xh(p) = \langle X(p), \nabla h(p) \rangle \text{ e } Yh(p) = \langle Y(p), \nabla h(p) \rangle.$$

Em particular, na região de deslize, as convenções de Filippov associam ao sistema (1) um campo vetorial chamado **Campo Deslizante** que é definido por

$$\tilde{Z}(p) = \frac{Yh(p)X(p) - Xh(p)Y(p)}{Yh(p) - Xh(p)},$$

onde $p \in \Sigma$.

Definição 1 (Conexão de Shilnikov Deslizante). *Seja $Z = (X, Y)$ um campo vetorial contínuo por partes tendo um pseudo sela-foco hiperbólico $p \in \Sigma^s$, e seja $q \in \partial\Sigma^s$ um ponto de dobra visível-visível de Z tal que:*

- *A trajetória para trás (resp. para frente) de Z começando em q segue o campo vetorial deslizante $\tilde{Z}$ e converge para p para trás no tempo (resp. para frente no tempo),*
- *a trajetória para frente (resp. para trás) de Z começando em q intercepta a superfície de comutação apenas nos pontos de cruzamento e atinge p em tempo finito $t_0 > 0$ (resp. $t_0 < 0$).*

Então, através de p e q, um loop deslizante Γ é facilmente caracterizado. Chamamos Γ de **órbita deslizante de Shilnikov** *ou* **Conexão de Shilnikov Deslizante** *(ver Figura 1).*

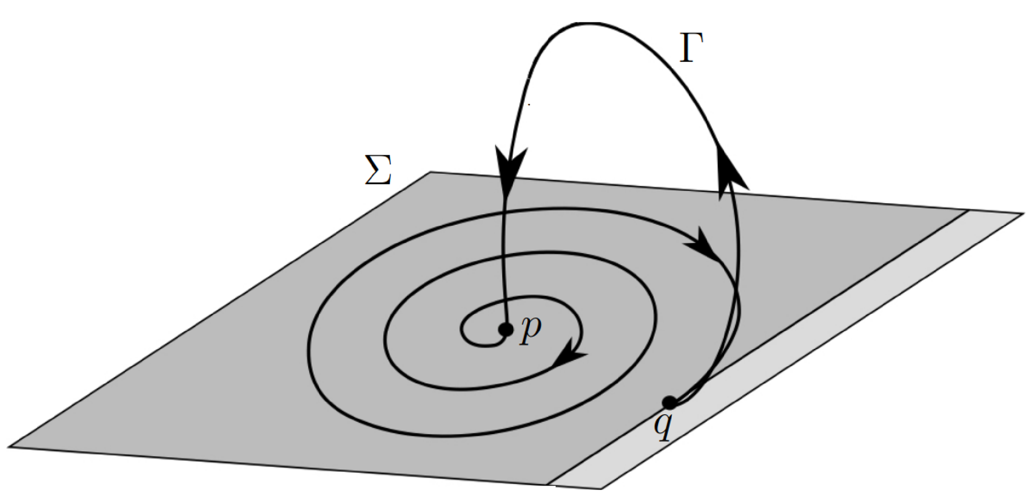

Figura 1: Órbita homoclínica de Shilnikov deslizante Γ conectando um pseudo sela-foco hiperbólico p a si mesmo.

Resultados

Dado o sistema (1), considere

$$X(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\alpha \\ x - \beta \\ y - \dfrac{3\beta^2}{8\alpha} \end{pmatrix} \tag{2}$$

e

$$Y(x,y,z) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \dfrac{3\alpha y}{\beta} + \beta \\ \mu + \dfrac{3\beta^2}{8\alpha} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ e $\mu \in \mathbb{R}$. Assim, as regiões da variedade Σ são dadas por:

- **Região de Costura:**
$$\Sigma^c = \left\{ (x,y,0) \in \Sigma \;\middle|\; y > \frac{3\beta^2}{8\alpha} \right\},$$
- **Região de Deslize:**
$$\Sigma^s = \left\{ (x,y,0) \in \Sigma \;\middle|\; y < \frac{3\beta^2}{8\alpha} \right\},$$
- **Região de Tangência:**
$$\Sigma^t = \left\{ (x,y,0) \in \Sigma \;\middle|\; y = \frac{3\beta^2}{8\alpha} \right\}.$$

Em [2] foi provado que o sistema (1), associado a (2) e (3) admite uma conexão de Shilnikov deslizante para $\mu = 0$. Em particular, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 1. *Para cada número real positivo α e β valem as seguintes afirmações:*

1. *Para $\mu = 0$, a origem $p = (0,0,0)$ é um pseudo sela-foco hiperbólico de Z, que é um foco hiperbólico instável do campo vetorial deslizante $\tilde{Z}$. Além disso, Z admite uma órbita de Shilnikov deslizante, conectando p a si mesmo, passando pelo ponto de dobra regular visível $q = \left(\dfrac{\beta}{2}, \dfrac{3\beta^2}{8\alpha}, 0\right)$.*
2. *Para $\mu \neq 0$, Z não admite uma órbita deslizante de Shilnikov.*

Conclusão

Queremos determinar condições para as quais o sistema (1) admite uma conexão de Shilnikov deslizante.

Referências

[1] Paul A. Glendinning. Shilnikov chaos, filippov sliding and boundary equilibrium bifurcations. *European Journal of Applied Mathematics*, 29(5):757–777, 2018.

[2] Douglas D. Novaes and Marco A Teixeira. Shilnikov problem in filippov dynamical systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 29(6):063110, 2019.

[3] A. F. Filippov. *Equations with the Right-Hand Side Continuous in x and Discontinuous in t*, pages 3–47. Springer Netherlands, Dordrecht, 1988.

Agradecimentos

Eduarda Dutra de Almeida foi parcialmente financiado pela FAPEMIG.