Existência de Soluções para Equações Diferenciais Neutras Explícitas com Memória Dependendo do Estado

Edmara Viana da Silva[1] & Eduardo Hernández Morales[2]

Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo (FFCLRP-USP).

edmaraviana@usp.br[1], lalohm@ffclrp.usp.br[2]

Universidade de São Paulo

Resumo

A teoria de equações diferenciais com memória dependendo do estado ocupa hoje um lugar de destaque na teoria geral de equações diferenciais com memória, com resultados independentes, altamente não triviais e problemas em aberto. Em termos gerais, uma equação com memória dependendo do estado é uma equação diferencial que apresenta termos de memória que podem ser descritos, por exemplo, na forma $u(\sigma(t,u_t)), u_{\sigma(t,u(t))}$ ou $u(\sigma(t,u(t)))$. Esta simples característica, estabelece uma diferença fundamental com os outros modelos e as outras teorias sobre equações diferencias com memória. Em particular notemos que, as funções da forma $u \to u_{\sigma(\cdot,u(\cdot))}$ e $u \to u(\sigma(\cdot,u(\cdot)))$ não são (em geral) Lipschitz em espaços de funções contínuas, o que introduz uma grande dificuldade no uso do princípio da contração e faz com que muitos problemas diferenciais com memória dependendo do estado não sejam bem-postos no espaço usual de funções contínuas.

Introdução

A teoria de equações com memória dependendo do estado teve início numa palestra de Rodney Driver sobre uma equação diferencial funcional do tipo neutra deduzida a partir do estudo de um problema de eletrodinâmica, no Congresso "International Sympos. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics", em 1963. O problema apresentado por Driver, pode ser representado na forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(g(t,x(t))), x'(h(t,x(t)))), t \in [0,a], \\ x(\theta) = \phi(\theta), \theta \in [-p, 0] \end{cases} \tag{1}$$

onde $f \in C([0,a] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $g, h \in C([0,a] \times \mathbb{R}^n; [-p,a])$ e $\phi \in C([-p,a];\mathbb{R}^n)$. No problema (1) os termos $g(t,x(t))$ e $h(t,x(t))$ são os termos que dão sentido ao conceito de memória dependendo do estado. O objetivo de nosso projeto de mestrado é o estudo e generalização dos resultados em [3]. Em [3] é estudada uma classe de equações neutras explícitas com argumento dependendo do estado que podem ser representadas na forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(g(t,x(t))), x'(h(t,x(t)))), \\ x(0) = x_0 \in X, \\ x'(0) = z_0 \in X, \end{cases} \tag{2}$$

sendo X um espaço de Banach e $t \in [0, \alpha]$.

Objetivos e Resultados

Usando o Teorema do Ponto fixo de Schauder, em [3] é estudada a existência local de soluções para o problema (2) sendo $X = \mathbb{R}$. Além disso, é estudada a unicidade de soluções. Especificamente, em [3] são provados os seguintes resultados.

Teorema 1. *[3] Suponha que $\alpha > 0$ e seja $J = [-\alpha, \alpha]$.*

1. *$f(\cdot)$ é continua em alguma região em $\mathbb{R}^4$ contendo*
$$P = \{(t,x,y,z) : |t| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta, \\ |y - x_0| \leq \beta, |z| \leq M\}$$
onde α, β e $M > |z_0|$ são contantes positivas, tais que $\alpha \leq \frac{\beta}{M}$ e $\sup_{(t,x,y,z)\in P} |f(t,x,yz)| < M$.
2. *As funções $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$ são continuas na projeção $\tilde{R}$ de P no espaço (t,x); $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$ são funções de $\tilde{R}$ em J, com $g(0,x_0) = h(0,x_0) = 0$;*
3. *As funções $f(\cdot)$ e $h(\cdot)$ são Lipschitz.*

Se as hipóteses (1)-(3) são satisfeitas, então o Problema de Valor Inicial (PVI) (2) tem ao menos uma solução que é continuamente diferenciável em J.

Para provar a existência da solução consideramos o conjunto

$$S = \{z \in X : z(0) = z_0, \|z\| \leq M\},$$

e definimos a aplicação $T : S \to S$ por

$$Tz(t) = f\Big(t, x_0 + \int_0^t z(s)ds, \\ x_0 + \int_0^{g(t,x_0+\int_0^t z(s)ds)} z(w)dw, z(h(t, x_0 + \int_0^t z(s)ds\Big).$$

Como queremos usar o Teorema de Ascoli-Arzela e o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, prosseguimos com a construção de um conjunto S_ϵ que seja, fechado, limitado, convexo e equicontínuo e mostramos que $T : S \to S$ é um aplicação contínua.

Em relação a unicidade de soluções, em [3] é provado o seguinte resultado.

Teorema 2. *[3] Além das hipóteses do Teorema 1, suponha que*

1. *$h(t,x) \equiv h(t)$, ou seja, $h(\cdot)$ é independente de x.*
2. *$f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ são Lipschitz.*

Então existe $\gamma_0 \in (0,\alpha]$ e uma única solução $u : [-\gamma_0, \gamma_0] \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciável do PVI (2) em $[-\gamma_0, \gamma_0]$.

Conclusão

Nossos estudos tem como objetivo generalizar os resultados em [3]. Em particular, notamos que em [3] os resultados são provados assumindo $X = \mathbb{R}$, e supondo que a função $h(\cdot)$ é independente da variável x. Em nossos estudos trabalharemos sendo X um espaço de Banach e provaremos a unicidade de solução supondo que $h \in C_{lip}([0,\alpha] \times X : X)$.

Referências

[1] DRIVER, RODNEY D.*A functional-differential system of neutral type arising in a two-body problem of classical electrodynamics.* In: International symposium on nonlinear differential equations and nonlinear mechanics. Academi Press, 1963. p. 474-484.

[2] DRIVER, RODNEY DAVID.*Delay-differential equations and an application to a two-body problem of classical electrodynamics.* Thesies (Ph.D.) - University of Minnesota. 1960. 63 pp.

[3] GRIMM, L. J.*Existence and continuous dependence for a class of nonlinear neutral-differential equations.* Proc. Amer. Math. Soc. 29, (1971), 467-473,

Agradecimentos

Meus estudos e meu trabalho de dissertação são financiados pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, processo nº 2022/04392-0.

FAPESP