Complexidade Topológica em Espaços de Configurações de Grafos

Douglas Vilela de Paiva Silva & Bhalchandra Digambar Thatte

Universidade Federal de Minas Gerais - ICEx

aleliv.d@gmail.com

Resumo

A teoria da Complexidade Topológica iniciada recentemente por Michael Farber e outros, traz nova luz sob o problema de algoritmos de planejamento de trânsito, já clássico na Teoria de Controle e Robótica. Munida de todo o ferramental da Topologia Algébrica, essa nova roupagem fornece uma medida numérica de quantos programas de trânsito contínuos são necessários para a determinação prévia de algoritmos de trânsito entre dois pontos de um dado espaço topológico qualquer. Nesse trabalho, veremos o caso específico dos Grafos, onde são estabelecidos cotas superiores e inferiores, bem como valores exatos de alguns grafos específicos. Mais ainda, é estudado o caso do movimento simultâneo de diversos corpos sem colisão sob tais grafos.

Introdução

A introdução de robôs autônomos de armazéns (já em mercado) prevê a possibilidade da automatização do planejamento de movimento contínuo dos mesmos. Mais do que um deslocamento contínuo, tais algoritmos devem ser capazes de entender que pequenas mudanças nas posições de origem/destino devem se traduzir em pequenas mudanças no caminho proposto, ou seja a escolha em si dos caminhos também é contínua. Isso em geral não pode ser feito com apenas um 'tipo de movimento' e assim gostaríamos de calcular o menor número de 'tipos de movimento' em poderemos fazer isso. Tal grandeza é a complexidade topológica definida por Farber.

Objetivos

Tal pôster tem como objetivo a introdução da teoria da Complexidade Topológica e em particular os casos dos espaços de configurações sobre grafos como modelagem de sistemas sem colisão sob os mesmos.

Resultados

Formalmente, a complexidade topológica é defina como abaixo.

Definição 1. *Sejam X um espaço topológico e PX espaço dos caminhos em X com a topologia do compacto-aberto. Além disso, seja $\pi : PX \to X \times X$ tal que $\pi(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$. A complexidade topológica $TC(X)$ é o menor número k tal que:*

- *Existe uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i=1}^k$ de $X \times X$.*
- *Para todo i existe uma seção local $s_i : U_i \to PX$*

Com isso, temos o seguinte resultado.

Teorema 1. *Dado um espaço topológico X, $TC(X) = 1$ se, e somente se X é contrátil.*

Exemplo 1. *Temos que $TC(\mathbb{S}^1) = 2$. Podemos construir um algoritmo explícito que dados $(x, y) \in U_1 = \{(x, y) \mid x \neq -y\}$, associamos a geodésica entre eles. E para $(x, y) \in U_2 = \{(x, y) \mid x \neq y\}$, associamos o caminho anti-horário.*

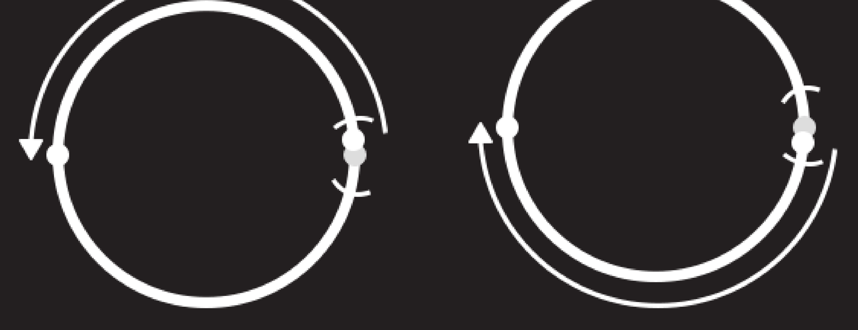

Figura 1: Impossibilidade de estender U_1 para $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Teorema 2. *Dados dois esp. topológicos X e Y tais que X domina Y, então $TC(X) \geq TC(Y)$.*

Corolário 3. *Se $X \simeq_H Y$, então $TC(X) = TC(Y)$.*

Se quisermos estudar a complexidade topológica num problema de vários corpos em X, basta calcularmos $TC(X \times \cdots \times X)$. De fato existem resultados sobre esse caso ($TC(X \times Y) \leq TC(X) + TC(Y) + 1$, por exemplo), mas geral o foco é no caso de vários corpos com a restrição do algoritmo ser livre de colisões. Para isso, introduzimos o conceito de espaços de configurações.

Definição 2. *Dado um espaço topológico X e um inteiro $k \geq 1$, definimos o espaço de configurações como o seguinte conjunto, munido da topologia de subespaço de X^k:*

$$F(X, k) = \{(x_1, \cdots, x_k) \in X^k : x_i \neq x_j, \quad i \neq j\}$$

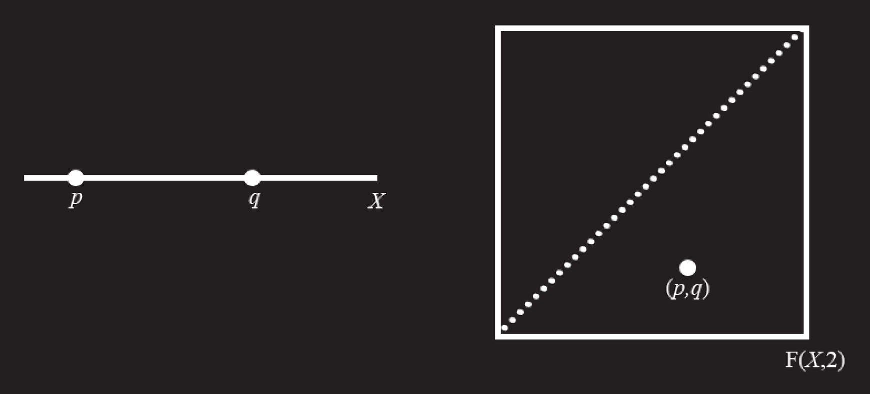

Figura 2: Espaço de Configurações de 2 pontos no intervalo I.

A teoria de complexidade topológica sobre espaços de configurações é extremamente rica, e em particular, quando os espaços ambiente são R^n ou grafos. Estudaremos o segundo caso. Antes de conseguirmos cotas inferiores/superiores, ou até mesmo um valor específico precisamos garantir que os espaços de configurações de grafos sejam conexos por caminhos. Isso é garantido pelo seguinte resultado de Abrams.

Lema 1. *Se G é um grafo conexo contendo ao menos um vértice essencial, então $F(G, n)$ é conexo.*

Teorema 4. *Dada uma árvore Γ contendo ao menos um vértice essencial, então*

$$TC(F(\Gamma, n)) \leq 2m(\Gamma) + 1$$

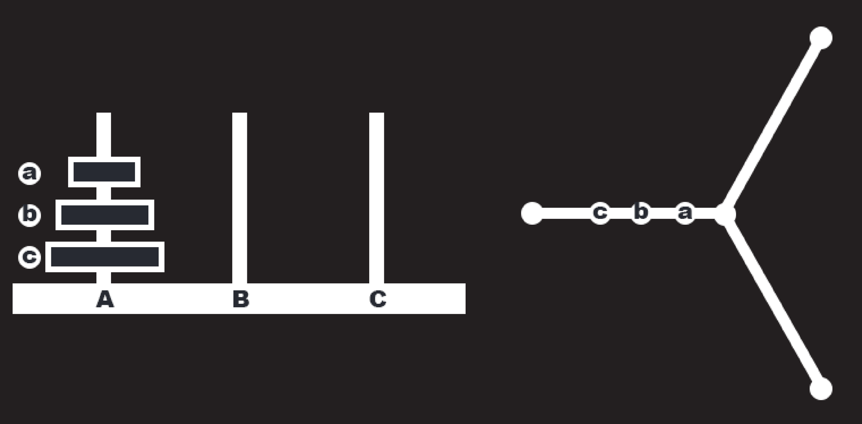

Figura 3: Modelagem da torre de Hanoi no grafo Y.

De fato, tal cota superior é exatamente o valor da complexidade topológica em alguns casos.

Teorema 5. *Dada uma árvore $\Gamma(\not\simeq I)$ contendo ao menos um vértice essencial, então se $n > 2m(\Gamma)$ e no caso $n = 2$, $\Gamma \not\simeq Y$, então*

$$TC(F(\Gamma, n)) = 2m(\Gamma) + 1$$

Referências

[1] Aaron Abrams. Configuration spaces of colored graphs. *Geometriae Dedicata*, 92:185–194, 2002.

[2] Michael Farber. *Configuration Spaces and Robot Motion Planning Algorithms*, pages 263–303.

[3] Michael Farber. Collision free motion planning on graphs. In *Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics*, 2004.

[4] Robert Ghrist. Configuration spaces and braid groups on graphs in robotics. *arXiv: Geometric Topology*, 1999.

Agradecimentos

Agradeço à UFMG e à comissão organizadora deste evento pela oportunidade de apresentar meu trabalho em um evento de excelência como esse. Agradeço também à CAPES pelo apoio financeiro.