Funtores representáveis e o Lema de Yoneda

Diana Arriel

Unicamp - IMECC

d170020@dac.unicamp.br

Introdução

Definição 0.1 (Funtor representável)**.** *Seja C uma categoria localmente pequena. Um funtor $F : C \to Set$ é dito representável se é naturalmente isomorfo a $\mathrm{Hom}(A, \_)$ para algum $A \in \mathrm{ob}(C)$.*

Assim, funtores representáveis fornecem representações de uma categoria abstrata C em termos de conjuntos e funções, o que contribui no estudo da estrutura de C.

Tendo esse interesse em vista, podemos nos perguntar que informações são necessárias para definir um isomorfismo natural entre F e $\mathrm{Hom}(A, \_)$. Ou, mais geralmente, o que é preciso para definir uma transformação natural entre tais funtores. Estas informações podem ser extraídas do Lema de Yoneda.

Resultados

Funtor Representável

Exemplo 0.2. *O funtor esquecimento $F : Ab \to Set$, onde Ab é a categoria cujos objetos são grupos abelianos e os morfismos são homomorfismos entre eles, é representável por $\mathbb{Z}$. De fato, o mapa natural*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, M) &\to M \\ f &\mapsto f(1) \end{aligned}$$

é isomorfismo de funtores.

Vamos mostrar que de fato temos isomorfismo de funtores entre $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \_)$ e o funtor esquecimento $F : Ab \to Set$.

Dado $M \in Ab$, vamos mostrar que μ cuja componente em M é dada por:

$$\begin{aligned} \mu_M : \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, M) &\to M \\ f &\mapsto f(1) \end{aligned}$$

é uma transformação natural, isto é, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, M) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \_)(g)"] \arrow[d, "\mu_M"] & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, N) \arrow[d, "\mu_N"] \\ M \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

Por um lado temos: $g \circ \mu_M(f) = g(f(1)) = g \circ f(1)$

Por outro, $\mu_N(g \circ f) = g \circ f(1)$.

Logo, o diagrama comuta e, consequentemente, μ é transformação natural.

Agora, definimos outra transformação natural cujas componentes são dadas por:

$$\begin{aligned} \xi_M : M &\to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, M) \\ x &\mapsto \xi_M(x) : \mathbb{Z} \to M, \end{aligned}$$

onde $\xi_M(x)(1) = x$. Como $\xi_M(x)$ é homomorfismo de grupos, essa função fica completamente determinada pelo valor dela em 1.

Daí, $\mu_M(\xi_M(x)) = \xi_M(x)(1) = x \Rightarrow \mu_M \circ \xi_M = 1_M$.

E $\xi_M \circ \mu_M : \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, M) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, M)$ é tal que, para $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, M)$, temos

$$\xi_M(\mu_M(f)) = \xi_M(f(1)) : \mathbb{Z} \to M,$$

onde $\xi_M(f(1))(1) = f(1)$. Como $\xi_M(f(1))$ e f são homomorfismos de grupos com domínio $\mathbb{Z}$, ambos podem ser completamente determinados a partir de seu valor em 1, portanto, $\xi_M(f(1)) = f$. Logo $\xi_M \circ \mu_M = 1_{\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, M)}$.

Lema de Yoneda

Teorema 0.3 (Lema de Yoneda)**.** *Para qualquer funtor $F : C \to Set$ cujo domínio C é localmente pequeno e qualquer objeto $X \in C$, existe uma bijeção:*

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(X, \_), F) \simeq F(X)$$

que associa a transformação natural $\gamma : \mathrm{Hom}(X, \_) \Rightarrow F$ ao elemento $\gamma_X(1_X) \in F(X)$

Demonstração. Seja $\gamma : \mathrm{Hom}(X, \_) \Rightarrow F$ transformação natural. Temos o seguinte diagrama comutativo, onde $f : X \to Y \in \mathrm{hom}(C)$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(X, X) \arrow[r, "f \circ \_"] \arrow[d, "\gamma_X"] & \mathrm{Hom}(X, Y) \arrow[d, "\gamma_Y"] \\ F(X) \arrow[r, "F(f)"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

Daí, podemos determinar todas as componentes de γ a partir de $\gamma_X(1_X) \in F(X)$:

$$\begin{tikzcd} 1_X \arrow[r, "f \circ \_"] \arrow[d, "\gamma_X"] & f \arrow[d, "\gamma_Y"] \\ \gamma_X(1_X) \arrow[r, "F(f)"] & F(f)(\gamma_X(1_X)) = \gamma_Y(f) \end{tikzcd}$$

de onde obtemos a bijeção desejada. $\square$

Yoneda X Cayley

Seja G um grupo e BG a categoria formada por um objeto $\{*\}$ cujos morfismos são os elementos de G e a operação do grupo é a composição. Considere o funtor Yoneda:

$$Y : BG^{op} \to Funt(BG, Set)$$

onde $Y(*) = \mathrm{Hom}(*, \_)$ e, se $g : * \to * \in \mathrm{Hom}(*, *)$, $Y(g) : \mathrm{Hom}(*, \_) \to \mathrm{Hom}(*, \_)$ é uma transformação natural com uma única componente:

$$\begin{aligned} Y(g)_* = \mathrm{Hom}(\_, *)(g) : \mathrm{Hom}(*, *) &\to \mathrm{Hom}(*, *) \\ g_1 &\mapsto g_1 \circ g = g_1 \cdot g \end{aligned}$$

Assim, $Y(g)_*$ é endomorfismo para todo $g \in G$. Vamos ver que $Y(g)_*$ também é bijeção:

- $g_0 \cdot g = g_1 \cdot g \Rightarrow g_0 = g_1$.
- $\forall\, w \in G,\ w \cdot g^{-1} \in G \Rightarrow Y(g)_*(w \cdot g^{-1}) = w$.

Agora, pelo Lema de Yoneda temos:

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(*, \_), \mathrm{Hom}(*, \_)) \simeq \mathrm{Hom}(*, *) = G$$

Mas $\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(*, \_), \mathrm{Hom}(*, \_)) = \{Y(g)_* \,|\, g \in G\}$ e $\{Y(g)_* \,|\, g \in G\} \subset \{f : G \to G \,|\, f \text{ é bijeção}\}$

$$\Rightarrow G \subset \{f : G \to G \,|\, f \text{ é bijeção}\}.$$

Logo, mostramos que G é isomorfo a um subgrupo de $S_{|G|}$, como afirma o Teorema de Cayley.

Referências

[1] Márcio Palmares Pinto de França. Lema de yoneda: uma introdução à teoria de categorias (guia auxiliar para iniciantes), 2018.

[2] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, 1998.

[3] D. M. Prata. Representações torcidas de quivers. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas, 2008.

[4] E. Riehl. *Category Theory in Context*. Aurora: Dover Modern Math Originals. Dover Publications, 2017.

Agradecimentos

Agradeço à FAPESP pelo financiamento do projeto de Iniciação Científica (processo nº 2022/15788-1) e ao meu orientador, Prof. Marcos Benevenuto Jardim, pelo apoio.