O Teorema de Engel

Chiara Vassoler

Ufes

chiara.merizio@edu.ufes.br

Resumo

Nesta apresentação, inicialmente, definiremos os conceitos de álgebra de Lie e sua representação adjunta. O resultado principal que apresentaremos é o Teorema de Engel, o qual afirma que uma álgebra de Lie é nilpotente sempre que a representação adjunta aplicada em todos os seus elementos é nilpotente. Este resultado propõe uma caracterização para as álgebras nilpotentes, que será usada na teoria de classificação a partir de algumas aplicações dos Critérios de Cartan.

Introdução

Friedrich Engel, matemático alemão que viveu entre 1861 e 1941, foi aluno de Felix Klein que, junto com Sophus Lie, desenvolveu a Teoria das Álgebras de Lie. Neste contexto, o Teorema de Engel é um resultado muito importante para a classificação dessas álgebras, já que é capaz de dizer se uma álgebra de Lie é nilpotente, isto é, se sua série central descendente se anula em algum momento, sob a hipótese de que a representação adjunta aplicada em todos os elementos dessa álgebra é nilpotente.

Para começar, uma representação de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um homomorfismo $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$, onde V é um espaço vetorial e $\mathfrak{gl}(V)$ é a álgebra de Lie das transformações lineares de V. Desse modo, para um elemento X na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, a função ad $: X \in \mathfrak{g} \longmapsto \mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, onde $\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, tal que $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$, é dita representação adjunta de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$.

Exemplo

A aplicação $\rho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{K})$ tal que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \longmapsto \rho(\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2a & -2b & 0 \\ -c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{pmatrix}$ é uma representação adjunta de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$.

Resultados

Lema 0.1. *Seja $V \neq 0$ um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra. Se todo $X \in \mathfrak{g}$ é nilpotente, então existe um ideal $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de codimensão 1.*

Demonstração. Se $\dim(\mathfrak{g}) = 1$, então $\dim(\mathfrak{h}) = 0$. Se $\dim \mathfrak{g} > 1$, então $\mathfrak{g}$ admite subálgebras não-triviais, digamos $\mathfrak{h}$. Suponha $\dim(\mathfrak{h})$ máxima, basta mostrar que a codimensão de $\mathfrak{h}$ é 1 e que $\mathfrak{h}$ é ideal considerando o espaço vetorial $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. $\square$

Teorema 0.2. *Seja $V \neq 0$ um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra. Suponha que todo $X \in \mathfrak{g}$ seja nilpotente. Então, existe $v \in V (v \neq 0)$ tal que $Xv = 0, \forall X \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração. Indução sobre $\dim(\mathfrak{g})$. Se $\dim \mathfrak{g} = 1$, tome $X \in \mathfrak{g}$ com $X \neq 0$. Mas, X nilpotente $\Rightarrow \exists k \geq 1$ tal que $X^k = 0$ e $X^{k-1} \neq 0$. Seja, então, $w \in V$ tal que $X^{k-1}w \neq 0$, assim podemos escolher $v = X^{k-1}w$ e teremos $v \neq 0$ e $X^k v = 0$. Para $\dim \mathfrak{g} > 1$, pelo Lema 0.1, existe um ideal $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de codimensão 1 e, pela hipótese de indução, $W = \{v \in V : Xv = 0, \forall X \in h\}$ é não nulo. Como os elementos de W se anulam em h, para verificar o que queremos, basta mostrar que existe $v \in W(v \neq 0)$ tal que $X_0 v = 0$, considerando $X_0 \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ com $[X_0, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. $\square$

Teorema 0.3. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra tal que todo $X \in \mathfrak{g}$ é nilpotente. Então, existem subespaços $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$ tais que $XV_i \subset V_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Esses subespaços podem ser definidos indutivamente por*

$$V_0 = 0$$
$$V_i = \{v \in V : Xv \in V_{i-1}, \forall X \in g\}$$

Em particular, estendendo sucessivamente bases dos subespaços V_i, chega-se uma base β de V tal que a matriz de X em relação a β é triangular superior com zeros na diagonal para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. Primeiramente, defina $V_1 = \{v \in V : Xv = 0, \forall X \in \mathfrak{g}\}$. Pelos resultados anteriores teremos $V_2 = \{v \in V : Xv \in V_1, \forall X \in \mathfrak{g}\} \subsetneq V_1$ e, seguindo o processo indutivamente, $V_i = \{v \in V : Xv \in V_{i-1}, \forall X \in \mathfrak{g}\} \subsetneq V_{i-1}$. Como a dimensão de V é finita, esse processo uma hora acaba, ou seja, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V_n = V$, o que mostra a primeira parte do Teorema. Para a segunda parte basta considerar a base $\beta = \{v_1, ..., v_{i_1}, v_{i_1+1}, ..., v_{i_2}, ..., v_{i_{n-1}+1}, ..., v_{i_n}\}$ com $v_{i_j+1}, ..., v_{i_{j+1}} \in V_{j+1}, j = 0, ..., n-1$. $\square$

Como resultado imediato deste último Teorema temos:

Corolário 0.4. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita e suponha que* ad *seja uma nil-representação. Então, a série central ascendente satisfaz $0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ para algum n.*

Finalmente podemos enunciar e demonstrar o Teorema de Engel:

Teorema 0.5. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita e suponha que, para todo $X \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(X)$ é nilpotente. Então $\mathfrak{g}$ é nilpotente.*

Demonstração. Pelo Corolário 0.4, a série central ascendente termina em $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$. Lembrando que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1}$, vamos mostrar, por indução sobre i, que $\mathfrak{g}^i \subset \mathfrak{g}_{n-i+1}$, isto é, que a série central descendente está contida na série central ascendente.

Para $i = 1$, $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_n$. Suponha que $\mathfrak{g}^i \subset \mathfrak{g}_{n-i+1}$ e vamos verificar se vale $\mathfrak{g}^{i+1} \subset \mathfrak{g}_{n-i}$. $\mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i]$, assim, pela hipótese de indução, $\mathfrak{g}^i \subset \mathfrak{g}_{n-i+1} \Rightarrow [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{n-i+1}]$, daí, $\mathfrak{g}^{i+1} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{n-i+1}] \subset \mathfrak{g}_{n-i}$, como queríamos.

Assim, para $i = n+1$, temos $\mathfrak{g}_{n-i+1} = \mathfrak{g}_0 = 0$ e, portanto, $\mathfrak{g}^{n+1} = 0$, ou seja, $\mathfrak{g}$ é nilpotente. $\square$

Conclusão

O Teorema de Engel é muito importante para a classificação das álgebras de Lie pois é uma caracterização para as álgebras nilpotentes. Com ele, será possível estudar as subálgebras de Cartan, que formam uma base para a classificação das álgebras semissimples.

Referências

[1] Dummit, D. S., Foote, R. M. *Álgebra abstrata*. Terceira edição, John Wiley, Inc. (2004).

[2] Luiz A. B. San Martin. Álgebras de Lie. Editora da Unicamp - 2a. edição (2010).

[3] Garcia, A., Lequain, Y. Elementos de álgebra. 6a ed., IMPA (2018).

[4] Jacobson, N. Lie Algebras. Interscience, New York (1962).

[5] Zhevlakov, K.A., Slin'ko, A.M., Shestakov, I.P., Shirshov, A.I. Rings that are nearly associative. Academic Press (1982).

Agradecimentos

Agradeço à FAPES pelo apoio financeiro e ao meu orientador Renato Fehlberg Junior pela dedicação em nossos estudos.